Devoir en temps libre n°8

Problème I

Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{m^2+n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Problème II

Soit $\alpha > 1$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} \qquad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}u$$

1. Justifier l'existence de I_n pour n entier non nul.
2. Avec le changement de variables $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, justifier que l'application $u \mapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n}$ est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et exprimer I_n à l'aide de v_n.
3. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall u \geqslant 0 \qquad \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u$
4. Pour $u \geqslant 0$, déterminer $\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$
5. Montrer $\qquad v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$
6. En déduire un équivalente simple de I_n pour $n \to +\infty$.

Problème III

1. Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer $\qquad \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\int_0^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$
3. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Établir $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$

   puis justifier $\qquad \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$
4. En déduire $\qquad \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \displaystyle\int_0^{1} \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2\,\mathrm{d}\theta$

5. Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ des familles complexes de carrés sommables.

   (a) Pour n entier, en considérant $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\,\mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q} = \sum\limits_{\ell=0}^{n} |b_\ell|\,\mathrm{X}^\ell$, établir

$$\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n} \frac{|a_k b_\ell|}{k+\ell+1} \leqslant \pi \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{\ell=0}^{n} |b_\ell|\,2}$$

   (b) Conclure que la famille $\left(\dfrac{a_k b_\ell}{k+\ell+1}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.