

## Corrigé de la séance 2 - MP+ - 22/11/24

### Exercice 1 (Décomposition de Dunford \*\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  trigonalisable. Montrer qu'il existe un unique couple  $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $u = d + n$  avec  $d \circ n = n \circ d$  et  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent. Établir également que  $d$  et  $u$  sont dans  $\mathbb{K}[u]$ .

**Corrigé :** Notons  $\pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ . D'après le lemme des noyaux, on a

$$E = \text{Ker } \pi_u(u) = \text{Ker } \bigcirc_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda} = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda \quad \text{avec } F_\lambda = \text{Ker } (u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda}$$

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ . On a  $F_\lambda$  stable par  $u$  car  $u$  commute avec  $(u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{K}[u]$ . Notant  $n_\lambda = u_{F_\lambda} - \lambda \text{id}_{F_\lambda}$ , on a  $n_\lambda \in \mathcal{L}(F_\lambda)$  et  $n_\lambda^{\alpha_\lambda} = 0$ . Il existe  $\mathcal{B}_\lambda$  base de  $F_\lambda$  telle que  $\text{mat}_{\mathcal{B}_\lambda} n_\lambda$  soit triangulaire supérieure stricte et on concatène ces bases pour former  $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda$  une base

de  $E$ . On pose

$$d = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda \text{id}_{F_\lambda} \quad \text{et} \quad n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} n_\lambda$$

Alors, on a  $\text{mat}_{\mathcal{B}} d$  diagonale,  $\text{mat}_{\mathcal{B}} n$  triangulaire supérieure avec commutation de ces deux matrices en écrivant un produit par blocs ce qui prouve l'existence d'un couple  $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $u = d + n$  avec  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent et  $d \circ n = n \circ d$ . Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ . Notons  $P_\lambda = \prod_{\mu \in \text{Sp}(u) \setminus \{\lambda\}} (X - \mu)^{\alpha_\mu}$ . On a  $(X - \lambda)^{\alpha_\lambda} \wedge P_\lambda = 1$  d'où l'existence, d'après le théorème de Bezout, de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{K}[X]$  tels que  $A(X - \lambda)^{\alpha_\lambda} + BP_\lambda = 1$ . Par conséquent, on a

$$\text{id} = A(u) \circ (u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda} + B(u) \circ P_\lambda(u)$$

d'où pour  $x \in E$

$$x = \underbrace{A(u) \circ (u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda}(x)}_{a_\lambda} + \underbrace{B(u) \circ P_\lambda(u)(x)}_{b_\lambda}$$

Comme  $(X - \lambda)^{\alpha_\lambda} P_\lambda = \pi_u$  est annulateur de  $u$ , on obtient sans difficulté

$$b_\lambda \in F_\lambda \quad \text{et} \quad a_\lambda \in \text{Ker } P_\lambda(u) = \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(u) \setminus \{\lambda\}} F_\mu$$

et cette décomposition  $x = a_\lambda + b_\lambda$  avec  $(a_\lambda, b_\lambda) \in \text{Ker } P_\lambda(u) \times F_\lambda$  est unique (unicité établie dans le lemme des noyaux). Ainsi, l'application  $p_\lambda = B(u) \circ P_\lambda(u) : x \mapsto b_\lambda$  est le projecteur sur  $F_\lambda$  parallèlement à  $\bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(u) \setminus \{\lambda\}} F_\mu$  et on a donc établi que  $p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ . On

vérifie sans difficulté que  $d = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$  ce qui prouve  $d \in \mathbb{K}[u]$  et par conséquent  $n = u - d \in$

$\mathbb{K}[u]$ . Enfin, considérons un autre couple  $(d', n')$  solution de la décomposition. Comme  $d'$  et  $n'$  commutent, alors  $d'$  et  $u = d' + n'$  commutent et par conséquent  $d'$  commute avec tout polynôme en  $u$  et en particulier avec  $d$ . On a alors  $d$  et  $d'$  diagonalisables et qui commutent et qui sont donc co-diagonalisables d'où  $d - d'$  diagonalisable. De même, on a  $n$  et  $n'$  qui commutent puis  $n - n'$  nilpotent (résultat classique). Ainsi, on a l'égalité  $d - d' = n - n'$  avec  $d - d'$  diagonalisable et  $n - n'$  nilpotent d'où  $d - d' = 0$  et  $n - n' = 0$  et on conclut

Il existe un unique couple  $(d, n) \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u = d + n$  avec  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent,  $d \circ n = n \circ d$  et de plus  $d, n$  dans  $\mathbb{K}[u]$ .

**Remarque :** On a montré l'existence et l'unicité de la *décomposition de Dunford*.

**Variante :** Pour établir que les projecteurs spectraux sont dans  $\mathbb{K}[u]$ , on peut observer

$$\bigwedge_{\lambda \in \text{Sp}(u)} P_\lambda = 1$$

D'après la relation de Bezout, on dispose d'une famille  $(U_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$  dans  $\mathbb{K}[X]$  telle que

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} U_\lambda P_\lambda = 1$$

On pose  $\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad p_\lambda = (U_\lambda P_\lambda)(u)$

D'après la relation de Bezout, il vient

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} p_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (U_\lambda P_\lambda)(u) = \text{id}$$

Soit  $(\lambda, \mu) \in \text{Sp}(u)^2$  avec  $\lambda \neq \mu$ . On a  $(X - \mu)^{\alpha_\mu}$  diviseur de  $P_\lambda$  puis

$$p_\lambda \circ p_\mu = (U_\lambda P_\lambda U_\mu P_\mu)(u) = (\dots \times (X - \mu)^{\alpha_\mu} P_\mu)(u) = (\dots \times \pi_u)(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

puis 
$$p_\mu = p_\mu \circ \left( \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} p_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \underbrace{p_\mu \circ p_\lambda}_{=0 \text{ si } \lambda \neq \mu} = p_\mu^2$$

ce qui prouve que les  $(p_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$  sont des projecteurs. On vérifie sans difficulté

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad \text{Im } p_\lambda \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^{\alpha_\lambda} = F_\lambda$$

Puis 
$$E = \text{id}(E) = \text{Im} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} p_\lambda \subset \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Im } p_\lambda \subset \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda = E$$

On en déduit que toutes les inclusions sont des égalités et en particulier

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad \text{Im } p_\lambda = F_\lambda$$

Enfin, pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , on a

$$p_\lambda(x) = 0 \implies x = \sum_{\mu \in \text{Sp}(u)} p_\mu(x) = \sum_{\mu \in \text{Sp}(u) \setminus \{\lambda\}} p_\mu(x) \in \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(u) \setminus \{\lambda\}} F_\mu$$

d'où 
$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad \text{Ker } p_\lambda \subset \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(u) \setminus \{\lambda\}} F_\mu$$

avec égalité pour raison de dimension en écrivant par exemple le théorème du rang avec  $p_\lambda$ . Ainsi, la famille des projecteurs  $(p_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$  est la famille de projecteurs associée à la décomposition

$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda$  et on en déduit alors

$$d = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$$

en considérant l'écriture triangulaire par blocs dans une base adaptée à cette décomposition. On conclut ensuite comme précédemment.

## Exercice 2 (Suites récurrentes linéaires \*\*\*)

Soit  $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $(u_n)_n$  suite récurrente linéaire d'ordre  $p$  (entier non nul) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n$$

avec  $a_0, \dots, a_{p-1}$  des scalaires et  $a_0 \neq 0$ . On note  $P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$  et on suppose  $P$  scindé dans

$\mathbb{K}[X]$  de la forme  $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$  avec les  $\lambda_i$  deux à deux distincts et les  $m_i$  des entiers non nuls. On note  $\sigma : E \rightarrow E, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$  et  $\Delta = \sigma - \text{id}$ .

1. Justifier que  $\sigma \in \mathcal{L}(E)$  puis interpréter  $S_H$  à l'aide de  $P(\sigma)$ .
2. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  et  $m$  entier non nul. On note  $e_\lambda = (\lambda^n)_n$  et pour  $u \in E$ , on note  $u = e_\lambda y$  avec  $y \in E$ . Enfin, pour  $k$  entier, on pose  $r_k = (n^k)_n$  et  $F_k = \text{Vect}(r_0, \dots, r_k)$ .

(a) Justifier que  $y$  est bien définie puis établir

$$u \in \text{Ker}(\sigma - \lambda \text{id})^m \iff y \in \text{Ker} \Delta^m$$

(b) Établir  $F_{m-1} \subset \text{Ker} \Delta^m$

(c) Conclure que l'inclusion précédente est une égalité.

3. En déduire que  $(n \mapsto n^j \lambda_i^n, i \in \llbracket 1; r \rrbracket, j \in \llbracket 0; m_i - 1 \rrbracket)$  est une base de  $S_H$ .

**Corrigé :** 1. On a clairement  $\sigma$  linéaire et à valeurs dans  $E$  et sans difficulté, il vient

$$\sigma \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad S_H = \text{Ker} P(\sigma)$$

2.(a) La suite  $y$  est bien définie par  $y = e_{\lambda^{-1}}u$ . On observe

$$(\sigma - \lambda \text{id})(u) = \lambda e_\lambda \Delta(y)$$

et par récurrence  $\forall k \in \mathbb{N} \quad (\sigma - \lambda \text{id})^k(u) = \lambda^k e_\lambda \Delta^k(y)$

Ainsi

$$u \in \text{Ker}(\sigma - \lambda \text{id})^m \iff y \in \text{Ker} \Delta^m$$

**Remarque :** Poser  $u = e_\lambda y$  est l'analogie discret de la variation de la constante puisque  $\text{Ker}(\sigma - \lambda \text{id}) = \text{Vect}(e_\lambda)$ .

2.(b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On a  $\Delta(r_k)(n) = (n+1)^k - n^k = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} n^\ell$

d'où  $\Delta(r_k) \in F_{k-1}$  et par suite  $\Delta(F_k) \subset F_{k-1}$  et par récurrence  $\Delta^\ell(F_k) \subset F_{k-\ell}$  pour tout  $\ell \in \llbracket 0; k \rrbracket$  d'où  $\Delta^{k+1}(F_k) \subset \Delta(F_0) = \{0_E\}$ . En particulier, on a  $\Delta^m(F_{m-1}) = \{0_E\}$ , c'est-à-dire

$$F_{m-1} \subset \text{Ker} \Delta^m$$

2.(c) L'espace  $\text{Ker} \Delta^m$  est l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre  $m$  vérifiant une certaine relation de récurrence linéaire. Étant donné un choix de  $m$  scalaires, il existe, par principe de récurrence une suite dans  $\text{Ker} \Delta^m$  ayant pour  $m$  premiers termes ces  $m$  scalaires et toujours par principe de récurrence, une telle suite est unique ce qui revient à dire que  $\Phi : \text{Ker} \Delta^m \rightarrow \mathbb{K}^m, (u_n)_n \mapsto (u_0, \dots, u_{m-1})$  est un isomorphisme et par conséquent  $\dim \text{Ker} \Delta^m = m = \dim F_{m-1}$ . Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut

$$F_{m-1} = \text{Ker} \Delta^m$$

**Remarque :** Il faut comprendre l'opérateur comme une dérivée « discrète ». Ainsi, les suites dont la dérivée discrète d'ordre  $m$  est nulle sont les suites polynomiales d'ordre inférieur.

3. D'après le lemme des noyaux, il vient

$$S_H = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(\sigma - \lambda_i \text{id})^{m_i}$$

avec les  $\lambda_i$  des scalaires non nuls puisque  $a_0 \neq 0$  et les  $m_i$  des entiers non nuls. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad (n \mapsto n^j \lambda_i^n, k \in \llbracket 0; m_i - 1 \rrbracket) \text{ base de } \text{Ker}(\sigma - \lambda_i \text{id})^{m_i}$$

On conclut

La famille  $(n \mapsto n^j \lambda_i^n, i \in \llbracket 1; r \rrbracket, j \in \llbracket 0; m_i - 1 \rrbracket)$  est une base de  $S_H$ .

### Exercice 3 (Trigonalisation simultanée \*\*\*)

Soient  $A, B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  qui commutent. Montrer que  $A$  et  $B$  sont simultanément trigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP$  et  $P^{-1}BP$  sont triangulaires supérieures.

**Corrigé :** La matrice  $A$  admet au moins une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  puisque  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ . Le sous-espace propre  $E_\lambda(A)$  est stable par  $B$  et l'endomorphisme  $b_\lambda$  induit par  $B$  sur  $E_\lambda(A)$  admet lui aussi une valeur propre  $\mu$  pour la même raison que précédemment. Considérant  $X$  matrice colonne d'un vecteur propre de l'endomorphisme  $b_\lambda$ , on a

$$BX = \mu X \quad \text{et} \quad AX = \lambda X$$

Ainsi, les matrices  $A$  et  $B$  admettent un vecteur propre commun. On procède ensuite par récurrence en notant

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \quad AB = BA \quad \implies \quad \exists S \in GL_n(\mathbb{C}) \mid (S^{-1}AS, S^{-1}BS) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})^2$$

- $\mathcal{P}(1)$  : l'initialisation est évidente.
- $\mathcal{P}(n-1) \implies \mathcal{P}(n)$  Supposons  $\mathcal{P}(n-1)$  vraie pour  $n \geq 2$  fixé. Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$  avec  $AB = BA$ . D'après le résultat préliminaire, il existe  $\varepsilon_1$  vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ . En complétant  $(\varepsilon_1)$  en base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\mathbb{C}^n$ , notant  $P = \text{mat}_{\mathcal{B}}$ , on obtient les matrices par blocs

$$P^{-1}AP = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A' \end{array} \right) \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \left( \begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & B' \end{array} \right)$$

où le symbole  $*$  désigne des termes qu'il n'est pas utile de préciser. Le produit par blocs donne

$$\left( \begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A' \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & B' \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda\mu & * \\ \hline 0 & A'B' \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left( \begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & B' \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A' \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mu\lambda & * \\ \hline 0 & B'A' \end{array} \right)$$

Comme  $A$  et  $B$  commutent, il s'ensuit que les matrices de  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$   $A'$  et  $B'$  commutent. D'après l'hypothèse  $\mathcal{P}(n-1)$ , il existe  $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$  tel que  $A' = QTQ^{-1}$  et  $B' = QSQ^{-1}$  avec  $(T, S) \in \mathcal{T}_{n-1}^+(\mathbb{C})^2$ . Enfin, posant  $R = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)$ , on a clairement  $R \in GL_n(\mathbb{C})$  avec  $R^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array} \right)$ .

Le produit par blocs donne

$$R^{-1}(P^{-1}AP)R = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & Q^{-1}A'Q \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & T \end{array} \right)$$

et

$$R^{-1}(P^{-1}BP)R = \left( \begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & Q^{-1}B'Q \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & S \end{array} \right)$$

Ainsi

$$((PR)^{-1}A(PR), (PR)^{-1}B(PR)) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})^2$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc prouvé

Deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  qui commutent sont simultanément trigonalisables.

**Remarque :** Le résultat se généralise à une famille de matrices  $(A_i)_{i \in I}$  qui commutent. L'espace  $\text{Vect}(A_i)_{i \in I}$  est de dimension finie et admet une base qu'on note  $(A_1, \dots, A_p)$ . Par récurrence sur  $p$ , on montre qu'il existe un vecteur propre commun à  $A_1, \dots, A_p$ . Puis, par une récurrence sur  $n$  identique à celle présentée plus haut, on montre que les matrices sont simultanément trigonalisables.

### Exercice 4 (\*\*\*\*)

Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $(A, B) \in E^2$  et on pose  $\Phi(M) = AM + MB$  pour tout  $M \in E$ . Justifier que  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$  puis montrer que les matrices  $A$  et  $B$  sont trigonalisables si et seulement si l'endomorphisme  $\Phi$  l'est.

**Corrigé :** L'application  $\Phi$  est linéaire par bilinéarité du produit matriciel et clairement à valeurs dans  $E$  d'où

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(E)}$$

On pose  $\forall M \in E \quad f(M) = AM \quad \text{et} \quad g(M) = MB$

Pour les mêmes raisons qu'avec  $\Phi$ , les applications  $f$  et  $g$  sont des endomorphismes de  $E$ . On remarque

$$\forall M \in E \quad f \circ g(M) = AMB = g \circ f(M)$$

Par ailleurs, on observe que pour  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on a

$$\forall M \in E \quad P(f)(M) = P(A)M \quad \text{et} \quad P(g)(M) = MP(B)$$

ce qui prouve que les polynômes annulateurs de  $A$  et de  $f$  coïncident et de même pour  $B$  et  $g$ . Supposons les matrices  $A$  et  $B$  trigonalisables. Les polynômes caractéristiques  $\chi_A$  et  $\chi_B$  sont scindés dans  $\mathbb{K}[X]$ , annulateurs respectivement de  $A$  et de  $B$  donc de  $f$  et de  $g$  ce qui prouve que les endomorphismes  $f$  et  $g$  sont trigonalisables. Comme ils commutent, il existe une base de trigonalisation simultanée ce qui prouve que l'endomorphisme  $\Phi$  est trigonalisable. On considère  $A$  et  $B$  comme matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\Phi$  comme endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On a  $\chi_B = \chi_{tB}$  par propriété du déterminant et par conséquent, on dispose de  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  telles que  $AX = \lambda X$  et  $B^T Y = \mu Y$  ou encore  $Y^T B = \mu Y^T$ . Posant  $M = XY^T = (x_i y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  non nulle puisqu'il existe  $(i_0, j_0) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$  tel que  $x_{i_0} \neq 0$  et  $y_{j_0} \neq 0$ , on trouve

$$\Phi(M) = AXY^T + XY^T B = \lambda XY^T + X\mu Y^T = (\lambda + \mu)M$$

ce qui prouve  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) + \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi)$

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  tels que  $\Phi(M) = \alpha M$ . On a

$$\Phi(M) = \alpha M \iff AM = MC \quad \text{avec} \quad C = \alpha I_n - B$$

Supposons  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \emptyset$ . Par récurrence, on montre  $A^k M = MC^k$  pour tout  $k$  entier d'où  $P(A)M = MP(C)$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ . En particulier, il vient

$$M\chi_A(C) = \chi_A(A)M = 0$$

Notant  $\chi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A)}$ , on a

$$\det \chi_A(C) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \det(C - \lambda I_n)^{m_\lambda(A)} = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} ((-1)^n \chi_C(\lambda))^{m_\lambda(A)} \neq 0$$

La matrice  $\chi_A(C)$  étant inversible, il s'ensuit  $M = 0$  ce qui est faux.

Ceci prouve l'existence d'une valeur propre commune  $\lambda \in \mathbb{C}$  pour  $A$  et  $C$ . Ainsi, on dispose de  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  non nulle telle que  $CX = \lambda X$ , c'est-à-dire  $BX = (\alpha - \lambda)X$  et par conséquent

$$\alpha = \underbrace{\lambda}_{\in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} + \underbrace{\alpha - \lambda}_{\in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)}$$

Par double inclusion, on a donc établi

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) + \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$$

Les matrices A et B sont trigonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et d'après le résultat démontré précédemment, l'application  $\Phi$  vu comme endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable et avec la relation sur les spectres, il vient

$$\chi_{\Phi} = \prod_{1 \leq i, j \leq n} (X - \lambda_i - \mu_j)$$

avec  $\lambda_i, \mu_j$  les valeurs propres de A et B répétées avec leurs multiplicités. On considère de nouveau l'application  $\Phi$  comme endomorphisme du  $\mathbb{K}$ -ev E et on le suppose trigonalisable. Le polynôme caractéristique  $\chi_{\Phi}$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  ce qui prouve que  $\lambda_i + \mu_j \in \mathbb{K}$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ . Enfin, comme on a  $\text{Tr } B \in \mathbb{K}$ , il vient

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lambda_i = \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n (\lambda_i + \mu_j) - \text{Tr } B \right) \in \mathbb{K}$$

et de même pour les  $\mu_j$ . Par conséquent, les polynômes  $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$  et  $\chi_B = \prod_{j=1}^n (X - \mu_j)$  sont scindés dans  $\mathbb{K}[X]$  et il s'ensuit que les matrices A et B sont trigonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On conclut

L'endomorphisme  $\Phi$  est trigonalisable si et seulement si les matrices A et B le sont.

**Remarques :**(a) On a notamment prouvé le résultat auxiliaire suivant :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) + \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$$

(b) Pour déduire de  $AM = MC$  avec  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) \neq \emptyset$ , on peut aussi procéder comme suit. On note  $r = \text{rg } M$ . On dispose de P et Q dans  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  telles que  $M = PJ_rQ$  d'où

$$A'J_r = J_rC' \quad \text{avec} \quad A' = P^{-1}AP = \left( \begin{array}{c|c} A'_1 & A'_2 \\ \hline A'_3 & A'_4 \end{array} \right) \quad C' = QCQ^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} C'_1 & C'_2 \\ \hline C'_3 & C'_4 \end{array} \right)$$

Le calcul par blocs donne  $A'_1 = C'_1, A'_3 = 0$  et  $C'_2 = 0$  d'où  $\chi_{A'_1} | \chi_{A'}, \chi_{C'_1} | \chi_{C'}$  avec  $\chi_{A'_1} = \chi_{C'_1}$  et  $\chi_A = \chi_{A'}, \chi_C = \chi_{C'}$  par similitude. Ceci prouve que  $\chi_A$  et  $\chi_C$  ont un facteur commun de degré  $r \geq 1$  d'où le résultat.

### Exercice 5 (\*\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie égale à  $n$  entier non nul et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Pour  $x \in E$ , on pose

$$E_x = \text{Vect} (u^k(x), k \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0_E\}$$

L'endomorphisme  $u$  est dit *cyclique* s'il existe  $x \in E$  tel que  $E_x = E$ . On définit le *commutant* de  $u$  noté  $\mathcal{C}(u)$  par

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$

1. Soit  $x \in E$ . Justifier qu'il existe un polynôme unitaire  $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $I_x = \pi_{u,x}\mathbb{K}[X]$  et vérifiant  $\pi_{u,x} \mid \pi_u$ .
2. (a) On suppose  $\pi_u = P^\alpha$  avec  $P \in \mathbb{K}[X]$  irréductible et  $\alpha$  entier non nul. Établir qu'il existe  $x \in E$  tel que  $\pi_{u,x} = \pi$ .  
 (b) Généraliser le résultat précédent avec  $\pi_u$  quelconque. On pourra considérer sa décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{K}[X]$ .
3. En déduire  $u$  cyclique  $\iff \pi_u = \chi_u$
4. On suppose  $u$  trigonalisable.

(a) Établir  $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$

(b) En déduire  $\pi_u = \chi_u \iff \mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)$

**Corrigé :** 1. L'ensemble  $I_x$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , non réduit à  $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$  car il contient  $\pi_u$ . Ainsi

Il existe  $\pi_{u,x}$  unitaire engendrant  $I_x$  et donc diviseur de  $\pi_u$ .

2.(a) On a  $P^{\alpha-1}(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ . On dispose donc de  $x \in E$  tel que  $P^{\alpha-1}(u)(x) \neq 0_E$ . Comme  $\pi_{u,x}$  divise  $\pi_u = P^\alpha$  avec  $P$  irréductible, alors on a  $\pi_{u,x} = P^s$  avec  $s \leq \alpha$ . Or, par choix de  $x$ , on a  $P^{\alpha-1}(u)(x) \neq 0_E$  d'où  $s \geq \alpha$  et par conséquent

Il existe  $x \in E$  tel que  $\pi_{u,x} = \pi_u$ .

2.(b) On décompose  $\pi_u = \prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$  avec  $r$  entier non nul, les  $P_i$  dans  $\mathbb{K}[X]$  irréductibles unitaires deux à deux distincts et les  $\alpha_i$  entiers non nuls. Les  $P_i^{\alpha_i}$  sont deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux, il vient

$$E = \text{Ker } \pi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u)$$

On note  $u_i \in \mathcal{L}(E_i)$  l'induit par  $u$  sur  $E_i = \text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u)$  stable par  $u$  pour  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ . On a  $P_i^{\alpha_i}(u_i) = 0_{\mathcal{L}(E_i)}$  pour tout  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  par construction. Comme l'endomorphisme  $u$  est caractérisé par ses restrictions et donc ses induits sur les  $E_i$  pour  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ , s'il existe  $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$  tel que  $P_j^{\alpha_j-1}(u_j) = 0_{\mathcal{L}(E_j)}$ , alors on aurait  $P_j^{\alpha_j-1} \prod_{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus \{j\}} P_i^{\alpha_i}$  annulateur de  $u$  ce qui contredirait la minimalité de  $\pi_u$ . On en déduit

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \pi_{u_i} = P_i^{\alpha_i}$$

Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \exists x_i \in E_i \quad | \quad \pi_{u_i, x_i} = \pi_{u_i}$$

On pose  $x = \sum_{i=1}^r x_i$



On a 
$$\pi_{u,x}(u)(x) = \sum_{i=1}^r \pi_{u,x}(u)(x_i) = \sum_{i=1}^r \underbrace{\pi_{u,x}(u_i)(x_i)}_{\in E_i} = 0_E$$

Par somme directe, il vient

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \pi_{u,x}(u_i)(x_i) = 0_{E_i}$$

d'où

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad P_i^{\alpha_i} = \pi_{u_i, x_i} | \pi_{u,x}$$

Comme les  $P_i^{\alpha_i}$  sont deux à deux premiers entre eux, il s'ensuit que  $\pi_u = \prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$  divise  $\pi_{u,x}$  et on sait que  $\pi_{u,x}$  divise  $\pi_u$ . Ainsi, les deux polynômes sont associés et unitaires et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } x \in E \text{ tel que } \pi_{u,x} = \pi_u.}$$

3. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On dispose d'un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$  avec  $\deg R < \deg \pi_{u,x}$  tel que  $P = Q\pi_{u,x} + R$ . Il vient

$$P(u)(x) = Q(u) \circ \pi_{u,x}(u)(x) + R(u)(x) = R(u)(x)$$

ce qui prouve que  $(u^k(x))_{k \in \llbracket 0; \deg \pi_{u,x} - 1 \rrbracket}$  est génératrice de  $E_x$  et libre car  $R(u)(x) = 0$  avec  $\deg R < \deg \pi_{u,x}(x)$  et  $R$  non nul contredit la minimalité de  $\pi_{u,x}$ . Ainsi, on a

$$\dim E_x = \deg \pi_{u,x}$$

Si l'endomorphisme  $u$  est cyclique, on dispose de  $x \in E$  tel que  $E_x = E$  d'où

$$\deg \chi_u = \dim E = \dim E_x = \deg \pi_{u,x}$$

Ainsi, on a  $\pi_{u,x}$  divise  $\pi_u$  qui divise  $\chi_u$  et ces polynômes sont unitaires et de même degré d'où  $\pi_u = \chi_u$ . Réciproquement, si  $\pi_u = \chi_u$ , on dispose de  $x \in E$  tel que  $\pi_{u,x} = \pi$  d'où

$$\dim E_x = \deg \pi_{u,x} = \deg \pi_u = \deg \chi_u = \dim E$$

On en déduit  $E_x = E$ . On a donc montré

$$\boxed{u \text{ cyclique} \iff \pi_u = \chi_u}$$

4.(a) Soit  $\mathcal{B}$  une base de trigonalisation de  $u$  et  $T = \text{mat}_{\mathcal{B}} u \in T_n(\mathbb{K})$  (espace des matrices triangulaires supérieures). Notant

$$\mathcal{C}(T) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MT = TM\}$$

on a clairement  $\dim \mathcal{C}(T) = \dim \mathcal{C}(f)$ . Considérons la dimension de l'espace de solutions de l'équation

$$MT - TM = 0 \tag{S}$$

d'inconnue  $M \in T_n(\mathbb{K})$ . Les termes diagonaux donnent les équations triviales

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad m_{i,i} t_{i,i} - t_{i,i} m_{i,i} = 0$$

Par conséquent, le système (S) possède  $\frac{n(n+1)}{2} - n$  équations pour  $\frac{n(n+1)}{2}$  inconnues. Comme le rang de (S) est majorée par le nombre d'équations, il s'ensuit

$$\dim \mathcal{C}(T) \cap T_n(\mathbb{K}) \geq \frac{n(n+1)}{2} - \left( \frac{n(n+1)}{2} - n \right) \geq n$$

Ainsi

$$\boxed{\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{C}(T) \geq \dim \mathcal{C}(T) \cap T_n(\mathbb{K}) \geq n}$$

4.(b) Si  $\pi_u = \chi_u$ , comme on dispose de  $x \in E$  tel que  $E = E_x$ , on vérifie sans difficulté (exercice classique) que  $\mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)$ . Supposons  $\mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)$ . On a

$$\deg \pi_u = \dim \mathbb{K}[u] \leq n \leq \dim \mathcal{C}(u)$$

Les inégalités sont donc des égalités et comme  $\pi_u$  divise  $\chi_u$  et que ceux-ci sont de même degré et unitaires, ils sont égaux. On conclut

$$\boxed{\pi_u = \chi_u \iff \mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)}$$

### Exercice 6 (\*\*\*\*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $S(A)$  la classe de similitude de  $A$ , *i.e.*

$$S(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ semblable à } A\}$$

1. Montrer que si  $A$  est inversible, alors  $\overline{S(A)} \subset GL_n(\mathbb{C})$ .

2. Montrer  $A$  diagonalisable  $\iff S(A)$  fermée

**Corrigé :** 1. Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $(B_n)_n \in S(A)^\mathbb{N}$  avec  $B_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} B$ . Le déterminant est continu et invariant par similitude d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \det A = \det B_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \det B = \det A \implies \det B = \det A \neq 0$$

Ainsi

$$\boxed{\overline{S(A)} \subset GL_n(\mathbb{C})}$$

2. Supposons  $A$  diagonalisable. Soit  $(B_n)_n \in S(A)^\mathbb{N}$  avec  $B_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} B$ . Comme  $B_n$  est semblable à  $A$  pour tout  $n$  entier, on a  $\pi_{B_n} = \pi_A$  et par suite

$$\pi_{B_n}(B_n) = 0 = \pi_A(B_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi_A(B) = 0$$

Comme  $A$  est diagonalisable,  $\pi_A$  scindé à racines simples et  $\pi_A$  est annulateur de  $B$ , donc par théorème, la matrice  $B$  est diagonalisable. Par continuité de  $M \mapsto \chi_M$ , on a  $\chi_A = \chi_{B_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \chi_B = \chi_A$ . Ainsi, les matrices  $A$  et  $B$  sont diagonalisables avec même polynômes caractéristiques donc même valeurs propres et mêmes multiplicités pour les valeurs propres. Il s'ensuit que  $A$  et  $B$  sont semblables à une même matrice diagonale et donc semblables entre elles. Ceci prouve que  $B \in S(A)$ . Réciproquement, supposons  $S(A)$  fermée. Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  canoniquement associé à  $A$  et soit  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  une base de trigonalisation de  $u$ . On note  $\mathcal{B}_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2/k, \dots, \varepsilon_n/k^{n-1})$ . Ainsi

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u \left( \frac{\varepsilon_j}{k^{j-1}} \right) = \lambda_j \frac{\varepsilon_j}{k^{j-1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_{i,j}}{k^{j-i}}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \frac{\varepsilon_i}{k^{i-1}}$$

où les  $\lambda_j$  désignent les valeurs propres de  $u$  et les  $\alpha_{i,j}$  les coefficients au dessus de la diagonale dans  $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ . On en déduit

$$A_k = \text{mat}_{\mathcal{B}_k} u \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

La suite  $(A_k)_k$  est à valeurs dans  $S(A)$  puisque les  $A_k$  et  $A$  sont matrices d'un même endomorphisme dans des bases distinctes et  $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} D$  d'où  $D$  semblable à  $A$  par fermeture de  $S(A)$ .

On conclut

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff S(A) \text{ fermée}}$$

### Exercice 7 (\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -evn. Déterminer la nature topologique de

$$\Lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \in E^n \mid (x_1, \dots, x_n) \text{ libre}\}$$

**Corrigé :** Soit  $(x^{(k)})_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})_k \in (E \setminus \Lambda)^{\mathbb{N}}$  convergente de limite  $x \in E$ . Montrons  $x \in E \setminus \Lambda$  ce qui prouvera la fermeture de  $E \setminus \Lambda$  et donc l'ouverture de  $\Lambda$ . Pour tout  $k$  entier, il existe  $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(k)} x_i^{(k)} = 0$ . Pour tout  $k$  entier, on pose

$\alpha^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{\|\lambda^{(k)}\|}$ . La suite  $(\alpha^{(k)})_k$  est à valeurs dans  $S(0, 1)$  qui est un fermé borné de  $\mathbb{R}^n$  donc un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent, il existe une extractrice  $\varphi$  telle que  $\alpha^{(\varphi(k))} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha \in S(0, 1)$ .

On a  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} x_i^{(k)} = 0$  pour tout  $k$  entier et par combinaison linéaire de limites, il vient

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(\varphi(k))} x_i^{(\varphi(k))} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

d'où  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$  ce qui prouve  $x \in E \setminus \Lambda$  d'où la fermeture de  $E \setminus \Lambda$  et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Lambda \text{ est un ouvert de } E^n.}$$

**Variante :** Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \Lambda$ . On pose

$$\Phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|$$

et on note

$$S = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1 \right\}$$

On a  $S$  compact de  $\mathbb{K}^n$  (fermé borné en dimension finie) et  $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{K}^n, \mathbb{R})$  (composée de la norme avec une application linéaire en dimension finie) admet donc un minimum sur  $S$ . Par liberté de  $(x_1, \dots, x_n)$ , il s'ensuit que  $\text{Min}_S \Phi > 0$ . Soit  $\varepsilon \in ]0; \text{Min}_S \Phi[$  et  $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$  tel que  $\|x_i - y_i\| < \varepsilon$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Supposons qu'il existe  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$  tel que  $\sum_{i=1}^n \beta_i y_i = 0_E$ . Il vient

$$\sum_{i=1}^n \beta_i y_i = 0_E \iff \sum_{i=1}^n \beta_i x_i = \sum_{i=1}^n \beta_i (x_i - y_i)$$

Par inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\beta_i| \|x_i - y_i\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n |\beta_i|$$

Notant  $\gamma_i = \beta_i / \|\beta\|_1$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on obtient

$$\Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \left\| \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \right\| \leq \varepsilon \quad \text{avec} \quad (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in S$$

ce qui est absurde par choix de  $\varepsilon$ . Ainsi

$$\sum_{i=1}^n \beta_i y_i = 0_E \implies \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$$

On retrouve le résultat attendu.

### Exercice 8 (\*\*\*\*)

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , continue surjective. Montrer que pour tout  $a$  réel, l'ensemble  $f^{-1}(\{a\})$  n'est pas compact.

**Corrigé :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , continue surjective. Soit  $a$  réel tel que  $f^{-1}(\{a\})$  est compact. Alors, il existe  $R \geq 0$  tel que  $f^{-1}(\{a\}) \subset B_f(0, R)$ . Pour la suite, on note

$$B_R = B_f(0, R) \quad \text{et} \quad C_R = \mathbb{R}^2 \setminus B_f(0, R)$$

On a  $C_R$  connexe par arcs. Soit  $(u, v) \in C_R^2$ . On pose

$$\forall t \in [0; 1] \quad \varphi(t) = \frac{\|u\|(1-t) + \|v\|t}{\|(1-t)u + tv\|} [(1-t)u + tv]$$

L'application  $\varphi$  est continue avec  $\varphi(0) = u$ ,  $\varphi(1) = v$  et

$$\forall t \in [0; 1] \quad \|\varphi(t)\| = \|u\|(1-t) + \|v\|t > R$$

ce qui prouve que  $\varphi$  est à valeurs dans  $C_R$ . L'image  $f(C_R)$  est un connexe par arcs de  $\mathbb{R}$  autrement dit un intervalle de  $\mathbb{R}$  qui ne contient pas  $a$  donc

$$\varphi(C_R) \subset ]a; +\infty[ \quad \text{ou} \quad \varphi(C_R) \subset ]-\infty; a[$$

Enfin, on a  $f(B_R) \subset [-b; b]$  avec  $b \geq 0$  puisque  $f(B_R)$  est un compact. Donc, avec  $f(\mathbb{R}^2) = f(B_R) \cup f(C_R)$ , on trouve

$$f(\mathbb{R}^2) \subset [\min(a, -b); +\infty[ \quad \text{ou} \quad f(\mathbb{R}^2) \subset ]-\infty; \max(a, b)]$$

Dans tous les cas, ceci contredit la surjectivité de  $f$ .

**Variante :** Par construction, on a  $a \in f(B_R)$  et  $f(B_R)$  est un compact. Soient  $c, d$  dans  $\mathbb{R} \setminus f(B_R)$  avec  $c < a < d$ . Par surjectivité, il existe  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}^2$  tels que  $f(\alpha) = c$  et  $f(\beta) = d$  et par choix de  $c$  et  $d$ , on a  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $C_R$ . Comme  $C_R$  est connexe par arcs, il existe  $\varphi \in \mathcal{C}([0; 1], C_R)$  telle que  $\varphi(0) = \alpha$  et  $\varphi(1) = \beta$ . Puis, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$[c; d] = [f \circ \varphi(0); f \circ \varphi(1)] \subset f \circ \varphi([0; 1]) \subset f(C_R)$$

Comme  $a \in [c; d]$ , et  $a \notin f(C_R)$ , on a une contradiction.