FAMILLES SOMMABLES

B. Landelle

Table des matières

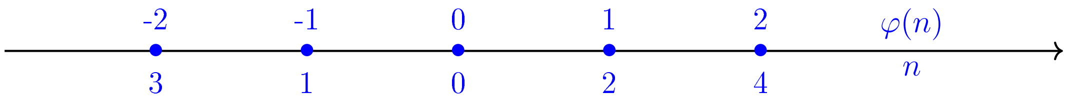
I Ensembles dénombrables

1 Définitions, propriétés

Définition 1. *Un ensemble est dit* dénombrable *s'il est en bijection avec* $\mathbb{N}$.

Proposition 1. *L'ensemble* $\mathbb{Z}$ *est dénombrable.*

Démonstration. Pour n entier, on pose $\varphi(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$. □



Théorème 1. *Toute partie infinie de* $\mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Démonstration. Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. On pose $a_0 = \min \mathrm{A}$ et $a_{n+1} = \min \mathrm{A} \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$. La suite $(a_n)_n$ est strictement croissante, à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc non majorée d'où $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Soit $x \in \mathrm{A}$. Il existe N entier tel que $x < a_{\mathrm{N}+1} = \min \mathrm{A} \setminus \{a_0, \ldots, a_{\mathrm{N}}\}$ Il s'ensuit que $x \in \{a_0, \ldots, a_{\mathrm{N}}\}$, d'où $\mathrm{A} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\}$. On pose enfin $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{A}, n \mapsto a_n$ qui est une bijection de $\mathbb{N}$ dans A par construction. □

Théorème 2. *Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de* $\mathbb{N}$.

Démonstration. Le sens direct est immédiat par définition d'un ensemble fini et d'un ensemble dénombrable. Réciproquement, considérons un ensemble A en bijection avec une partie $\mathrm{B} \subset \mathbb{N}$. Si l'ensemble A est infini, alors B l'est aussi donc B est dénombrable et par conséquent A aussi. Sinon, l'ensemble A est fini. □

Définition 2. *Un ensemble est dit* au plus dénombrable *s'il est fini ou dénombrable.*

Proposition 2. *Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit A un ensemble dénombrable et B une partie de A. On a

$$\mathrm{B} \subset \mathrm{A} \simeq \mathbb{N}$$

d'où B en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Le résultat suit. □

2 Produit d'ensembles

Théorème 3. *L'ensemble* $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable.*

Démonstration. On vérifie que l'application $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ par

$$\pi(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

est une bijection.

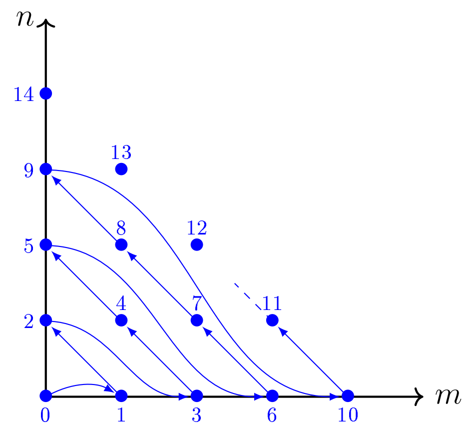


FIGURE 1 – Parcours de $\mathbb{N}^2$ par π

$\square$

Théorème 4. *Soient* E, F *des ensembles dénombrables. Alors* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *est dénombrable.*

Démonstration. Soient $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{N}$ et $\psi : \mathrm{F} \to \mathbb{N}$ et $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ des bijections. L'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathrm{E} \times \mathrm{F} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \longmapsto \pi(\varphi(x), \psi(y)) \end{cases}$$

est une bijection. $\square$

Corollaire 1. *L'ensemble* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

Démonstration. Tout élément de $\mathbb{Q}$ peut s'écrire sous forme d'une unique fraction irréductible p/q avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Ainsi, notant $\mathrm{A} = \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid p \wedge q = 1\}$, l'application $\varphi : \mathrm{A} \to \mathbb{Q}, (p,q) \mapsto p/q$ réalise une bijection de A sur $\mathbb{Q}$. On a $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$ dénombrables d'où $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dénombrable. L'ensemble A est une partie infinie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ puisque A contient $\mathbb{Z} \times \{1\}$ et c'est donc un ensemble dénombrable. Ainsi, l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est en bijection avec un ensemble dénombrable ce qui prouve que $\mathbb{Q}$ l'est aussi. $\square$

Corollaire 2. *Soient* $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ *des ensembles dénombrables. Alors* $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ *est dénombrable.*

Démonstration. Récurrence immédiate. $\square$

Théorème 5. *Soit* $(\mathrm{E}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille au plus dénombrable (i.e. I au plus dénombrable) d'ensembles au plus dénombrables. Alors l'union* $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ *est au plus dénombrable.*

[Admis]

Théorème 6 (Cantor). *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration. On utilise l'argument dit *de la diagonale de Cantor*. Supposons $[\,0\,;1\,[\; = \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. On écrit le développement en base 10 de x_n (non stationnarité à 9 pour garantir l'unicité)

$$x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} 10^{-k} = 0, a_{n,1} a_{n,2} \ldots a_{n,n} \ldots$$

On pose $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad b_n = \begin{cases} 2 & \text{si } a_{n,n} = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad$ et $\quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 10^{-n}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{1,1} a_{1,2} \ldots a_{1,n} \ldots \\ x_2 &= 0, a_{2,1} a_{2,2} \ldots a_{2,n} \ldots \\ \ldots &= \ldots \\ x_n &= 0, a_{n,1} a_{n,2} \ldots a_{n,n} \ldots \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

FIGURE 2 – Modification le long de la diagonale de Cantor

On a $x \notin \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ car $b_n \neq a_{n,n}$ pour tout n entier non nul et pourtant $x \in [\,0\,;1\,[$ ce qui est absurde. On en déduit que $[\,0\,;1\,[$ n'est pas dénombrable. Enfin, si $\mathbb{R}$ était dénombrable, toute partie de $\mathbb{R}$ serait au plus dénombrable ce qui est faux pour $[\,0\,;1\,[$ d'où le résultat. $\square$

II Familles sommables dans $[0; +\infty]$

1 Définitions

Définition 3. *On définit la* demi-droite réelle achevée *notée* $[\,0\,;+\infty\,]$ *ou* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *par*

$$\overline{\mathbb{R}_+} = [\,0\,;+\infty\,] = [\,0\,;+\infty\,[\cup \{+\infty\}$$

Définition 4. *Dans* $[\,0\,;+\infty\,]$, *on étend :*

- *la relation d'ordre* $\leqslant$ *avec* $x \leqslant +\infty$ *pour tout* $x \in [\,0\,;+\infty\,]$ *;*
- *les notions de borne supérieure et inférieure qui existent, conformément aux définitions (plus petit majorant, plus grand minorant), pour toute partie* $\mathrm{A} \subset [\,0\,;+\infty\,]$ *avec* $\sup \mathrm{A} = +\infty$ *si* A *contient* $+\infty$ *ou est une partie de* $\mathbb{R}_+$ *non majorée et* $\inf \varnothing = +\infty$, $\sup \varnothing = 0$ *;*
- *les opérations d'addition et de multiplication avec*

$$\forall x \geqslant 0 \qquad x + +\infty = +\infty + x = +\infty \qquad +\infty + +\infty = +\infty$$

$$\forall x \in \,]\,0\,;+\infty\,[\cup \{+\infty\} \qquad x \times +\infty = +\infty \times x = +\infty \qquad 0 \times +\infty = +\infty \times 0 = 0$$

Définition 5. *Soit* $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *famille à valeurs dans* $[\,0\,;+\infty\,]$. *On définit dans* $[\,0\,;+\infty\,]$ *la* somme *de cette famille notée* $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i$ *par*

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i = \operatorname*{Sup}_{\mathrm{F} \text{ fini } \subset \mathrm{I}} \sum_{i \in \mathrm{F}} u_i$$

Définition 6. *Une famille* $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de réels positifs est dite* sommable *si* $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i < +\infty$ *et* non sommable *sinon.*

Exemple : Soit $q \in [\,0\,;1\,[$. La famille $(q^{mn})_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. Soit F partie finie de $\mathbb{N}^{*2}$. Il existe $\mathrm{N} \geqslant 1$ tel que $\mathrm{F} \subset [\![\, 1\,;\, \mathrm{N} \,]\!]^2$. Par suite

$$\sum_{(m,n)\in \mathrm{F}} q^{mn} \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\sum_{m=1}^{\mathrm{N}} q^{mn} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} q^n \frac{1-q^{n\mathrm{N}}}{1-q^n} \leqslant \frac{1}{1-q}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} q^n \leqslant \frac{q}{(1-q)^2}$$

Le résultat suit. On verra une rédaction nettement plus efficace après énonciation du théorème de Fubini.

Définition 7. *On appelle* support *d'une famille* $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *de réels positifs l'ensemble noté* $\mathrm{supp}(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *défini par*

$$\mathrm{supp}(u_i)_{i\in \mathrm{I}} = \{i \in \mathrm{I} \mid u_i > 0\}$$

Proposition 3. *Soit* $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille de réels positifs. Si* $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *est sommable, alors son support est au plus dénombrable.*

Démonstration. On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{F}_n = \left\{ i \in \mathrm{I} \mid u_i \geqslant \frac{1}{n} \right\}$

Soit n entier non nul. Pour F partie finie de F_n, on a

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i \geqslant \sum_{i\in \mathrm{F}} u_i \geqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{Card}\,\mathrm{F}$$

d'où $\qquad \mathrm{Card}\,\mathrm{F} \leqslant n \sum_{i\in \mathrm{I}} u_i$

Si F_n est infini, alors on peut choisir $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}_n$ tel que Card F soit arbitrairement grand ce qui est exclu d'après la majoration ci-dessus. On en déduit que F_n est un ensemble fini et comme on a $\mathrm{supp}(u_i)_{i\in \mathrm{I}} = \bigcup_{n\in \mathbb{N}^*} \mathrm{F}_n$ union dénombrable d'ensembles finis, on conclut que le support est au plus dénombrable. □

Proposition 4. *Soient* $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *et* $(v_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *des familles à valeurs dans* $[0\,;+\infty]$ *et* $\lambda \in [0\,;+\infty]$. *On a*

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i\in \mathrm{I}} u_i + \sum_{i\in \mathrm{I}} v_i$$

2 Lien avec les séries

Soit $(u_n)_n$ suite de réels positifs. Si la série $\sum u_n$ diverge, on étend la notation somme en posant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$$

Théorème 7. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de réels positifs. On a*

$$\sum_{n\in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Remarque : En particulier, on a

$$(u_n)_{n\in \mathbb{N}} \text{ sommable} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

3 Théorèmes de comparaison

Proposition 5. *Soient* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *et* $(v_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *des familles à valeurs dans* $[\,0\,;+\infty\,]$ *telles que* $u_i \leqslant v_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$. *On a*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} v_i$$

Remarque : En particulier, on a

$$(v_i)_{i\in\mathrm{I}} \text{ sommable} \quad\Longrightarrow\quad (u_i)_{i\in\mathrm{I}} \text{ sommable}$$

Exemple : La famille $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. On a

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad m^2+n^2 \geqslant 2mn \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \leqslant \frac{1}{4m^2n^2}$$

Pour F partie finie de $(\mathbb{N}^*)^2$, il existe N entier non nul tel que $\mathrm{F} \subset [\![1\,;\mathrm{N}]\!]^2$ puis

$$\sum_{(m,n)\in[\![1\,;\mathrm{N}]\!]^2} \frac{1}{4m^2n^2} \leqslant \frac{1}{4}\zeta(2)^2 \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \forall s > 1$$

La sommabilité de $\left(\dfrac{1}{4m^2n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ en résulte et par comparaison, celle de $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ également. On verra une rédaction plus efficace après énonciation du théorème de Fubini.

Proposition 6. *Soit* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille à valeurs dans* $[\,0\,;+\infty\,]$ *et* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$. *On a*

$$\sum_{i\in\mathrm{J}} u_i \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$$

Remarque : En particulier, si $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in\mathrm{J}}$ l'est aussi.

4 Regroupement, réorganisation

Théorème 8 (Théorème de sommation par paquets). *Soient* $(\mathrm{I}_k)_{k\in\mathrm{K}}$ *un recouvrement disjoint de* I *et* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille à valeurs dans* $[\,0\,;+\infty\,]$. *On a*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i = \sum_{k\in\mathrm{K}} \left(\sum_{i\in\mathrm{I}_k} u_i\right)$$

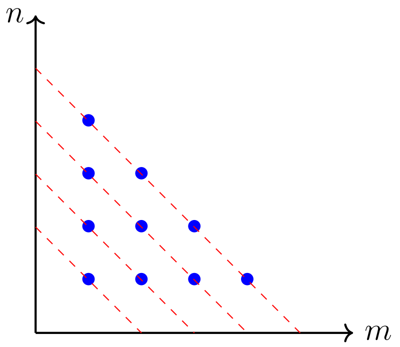
Exemple : Étude de $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^3}$

On pose

$$\forall p \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_p = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m+n = p\right\}$$

La famille $(\mathrm{I}_p)_{p\geqslant 2}$ est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$ et on a

$$\forall p \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_p = \{(m, p-m), m \in [\![1\,; p-1]\!]\}$$



Par sommation par paquets, il vient

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(m+n)^3}=\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in\mathrm{I}_p}\frac{1}{(m+n)^3}\right)=\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{p^3}\right)=\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{p-1}{p^3}\leqslant\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^2}<+\infty$$

Théorème 9. *Soit $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille à valeurs dans $[0\,;+\infty]$ et $\sigma\in\mathscr{S}(\mathrm{I})$ une permutation de I (bijection de I dans I). On a*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i=\sum_{i\in\mathrm{I}}u_{\sigma(i)}$$

Exemples : 1. Soit $\sigma\in\mathscr{S}(\mathbb{N}^*)$. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sigma(n)}=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty\quad\text{et}\quad\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sigma(n)^2}=\ldots<+\infty$$

2. Soit $\sigma\in\mathscr{S}(\mathbb{N}^*)$. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n\sigma(n)}\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

III Familles sommables de réels ou complexes

Dans ce qui suit, on a $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions

Définition 8. *La famille de réels ou complexes $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est dite* sommable *si la famille $(|u_i|)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable.*

Notation : On note $\ell^1(\mathrm{I})$ l'ensemble des familles sommables de $\mathbb{C}^{\mathrm{I}}$.

Remarque : Si la famille de réels $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable, alors les familles $(u_i^+)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(u_i^-)_{i\in\mathrm{I}}$ sont sommables puisque

$$\forall i\in\mathrm{I}\qquad 0\leqslant u_i^+\leqslant|u_i|\quad\text{et}\quad 0\leqslant u_i^-\leqslant|u_i|$$

De même, si la famille de complexes $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable, alors les familles $(\mathrm{Re}\,(u_i))_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mathrm{Im}\,(u_i))_{i\in\mathrm{I}}$ sont sommables puisque

$$\forall i\in\mathrm{I}\qquad 0\leqslant|\mathrm{Re}\,(u_i)|\leqslant|u_i|\quad\text{et}\quad 0\leqslant|\mathrm{Im}\,(u_i)|\leqslant|u_i|$$

Définition 9. *Soit $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de réels sommable. On définit la* somme *de cette famille notée $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}}u_i$ par*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i=\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i^+-\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i^-$$

Définition 10. *Soit $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de complexes sommable. On définit la* somme *de cette famille notée $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}}u_i$ par*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i=\sum_{i\in\mathrm{I}}Re\,(u_i)+\mathrm{i}\sum_{i\in\mathrm{I}}Im\,(u_i)$$

Remarque : On a donc

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i\right)=\sum_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{Re}\,(u_i)\quad\text{et}\quad\mathrm{Im}\left(\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i\right)=\sum_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{Im}\,(u_i)$$

Exemple : Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$. On a $(z^{nm})_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}\in\ell^1\left((\mathbb{N}^*)^2\right)$.

2 Propriétés

Proposition 7. *Soit* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}^*$. *On a*

$$(u_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \ell^1(\mathrm{I}) \iff (\lambda u_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \ell^1(\mathrm{I})$$

et dans ce cas
$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$$

Théorème 10 (Linéarité du symbole somme). *L'ensemble* $\ell^1(\mathrm{I})$ *un sev de* $\mathbb{C}^{\mathrm{I}}$ *et l'application* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}} \mapsto \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ *est une forme linéaire.*

Proposition 8 (Croissance de la somme). *Soient* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *et* $(v_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *des familles réelles sommables telles que* $u_i \leqslant v_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$. *Alors* $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} v_i$.

Théorème 11 (Inégalité triangulaire). *Soit* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \ell^1(\mathrm{I})$. *On a*

$$\left|\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} |u_i|$$

3 Regroupement, réorganisation

Théorème 12 (Théorème de sommation par paquets). *Soient* $(\mathrm{I}_k)_{k\in\mathrm{K}}$ *un recouvrement disjoint de* I *et* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \ell^1(\mathrm{I})$. *Alors, on a :*

- *pour tout* $k \in \mathrm{K}$, *la famille* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}_k}$ *est sommable ;*
- *la famille* $\left(\sum_{i\in\mathrm{I}_k} u_i\right)_{k\in\mathrm{K}}$ *est sommable ;*
- *et l'égalité* $$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i = \sum_{k\in\mathrm{K}} \left(\sum_{i\in\mathrm{I}_k} u_i\right)$$

Théorème 13. *Soit* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ *et* $\sigma \in \mathscr{S}(\mathrm{I})$ *une permutation de* I. *On a*

$$(u_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \ell^1(\mathrm{I}) \iff (u_{\sigma(i)})_{i\in\mathrm{I}} \in \ell^1(\mathrm{I})$$

et dans ce cas
$$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i = \sum_{i\in\mathrm{I}} u_{\sigma(i)}$$

4 Lien avec les séries

Théorème 14. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de réels ou complexes. On a*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \iff \sum u_n \text{ converge absolument}$$

et dans ce cas
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 15. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de réels ou complexes et* $\sigma \in \mathscr{S}(\mathbb{N})$. *On a*

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \iff \sum u_{\sigma(n)} \text{ converge absolument}$$

et dans ce cas
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

Remarque : Sans l'hypothèse de convergence absolue, le résultat est faux. Plus précisément, on dispose du *théorème de réarrangement de Riemann* : Soit $(u_n)_n$ suite réelle telle que $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge. Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe $\sigma \in \mathscr{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$.

IV Applications

1 Sommes doubles

Théorème 16 (Théorème de Fubini positif). *Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ une famille à valeurs dans $[0\,;+\infty]$. On a*

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{i,j} = \sum_{i\in\mathrm{I}}\left(\sum_{j\in\mathrm{J}} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in\mathrm{J}}\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} a_{i,j}\right)$$

Exemples : 1. On reprend l'exemple de $(q^{mn})_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} q^{mn} = \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^{mn}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{q^m}{1-q^m} \leqslant \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{q^m}{1-q} < +\infty$$

2. Étude de $\sum_{m,n\geqslant 2}\frac{1}{n^m}$. D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{m,n\geqslant 2}\frac{1}{n^m} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{n^m}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right] = 1$$

puis
$$\sum_{m,n\geqslant 2}\frac{1}{n^m} = \sum_{m=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^m}\right) = \sum_{m=2}^{+\infty}[\zeta(m)-1]$$

On obtient l'égalité
$$\sum_{m=2}^{+\infty}[\zeta(m)-1] = 1$$

Corollaire 3. *Soient $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(b_j)_{j\in\mathrm{J}}$ des familles à valeurs dans $[0\,;+\infty]$. On a*

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_i b_j = \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\right)\left(\sum_{j\in\mathrm{J}} b_j\right)$$

Exemple : D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{m^2n^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = \zeta(2)^2 < +\infty$$

Théorème 17 (Théorème de Fubini). *Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} \in \ell^1(\mathrm{I}\times\mathrm{J})$. On a*

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{i,j} = \sum_{i\in\mathrm{I}}\left(\sum_{j\in\mathrm{J}} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in\mathrm{J}}\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} a_{i,j}\right)$$

Corollaire 4. *Soit $(a_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \ell^1(\mathrm{I})$ et $(b_j)_{j\in\mathrm{J}} \in \ell^1(\mathrm{J})$. Alors, on a $(a_ib_j)_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} \in \ell^1(\mathrm{I}\times\mathrm{J})$ et*

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_i b_j = \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\right)\left(\sum_{j\in\mathrm{J}} b_j\right)$$

2 Produit de Cauchy

Définition 11. *On appelle* produit de Cauchy *des séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *réelles ou complexes la série* $\sum w_n$ *de terme général*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Théorème 18. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries réelles ou complexes absolument convergentes. Alors, leur produit de Cauchy* $\sum w_n$ *est une série absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration. Sans difficulté, la famille $(u_n v_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable puisque

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} |u_n v_m| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} |v_m|\right) < +\infty$$

Ainsi
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_n v_m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} v_m\right)$$

On pose $\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_p = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n+m=p\} = \{(n,p-n), n \in [\![0\,; p]\!]\}$

La famille $(\mathrm{I}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^2$.

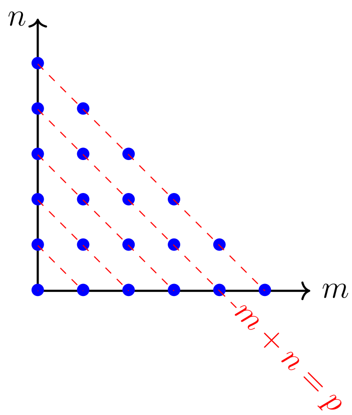


FIGURE 3 – Famille $(\mathrm{I}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ partition de $\mathbb{N}^2$

D'après le théorème de sommation par paquets, pour p entier la famille $(u_n v_m)_{(n,m)\in\mathrm{I}_p}$ est sommable (en fait, I_p est un ensemble fini) avec

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \sum_{(n,m)\in\mathrm{I}_p} u_n v_m = w_p$$

puis, la série $\sum \left(\sum_{(n,m)\in\mathrm{I}_p} u_n v_m\right) = \sum w_p$ converge absolument et on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty} w_p = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_n v_m$$

et le résultat suit. $\square$

Remarque : Sans l'hypothèse de convergence absolue, le résultat est faux en général. Considérons $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour n entier non nul et $u_0 = v_0 = 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Or, on a $k(n-k) \leqslant (n-1)^2$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ d'où la divergence grossière de la série $\sum w_n$. En fait, les hypothèses du théorème précédent peuvent être un peu affaiblies (théorème de Mertens, hors programme).

Exemple : Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $|a| < 1$, $|b| < 1$ et $a \neq b$. Les séries $\sum a^n$ et $\sum b^n$ convergent absolument d'où, d'après le théorème du produit de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \right)$$

et avec un recours à l'identité de Bernoulli, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{1}{(1-a)(1-b)}$$

On peut aussi établir ce résultat naïvement, sans recours au produit de Cauchy.

Annexes

Produit d'ensembles

Théorème 3. *L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Démonstration. Soit $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ par

$$\pi(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

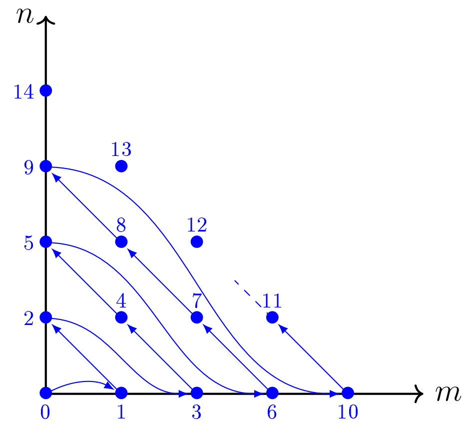


FIGURE 4 – Parcours de $\mathbb{N}^2$ par π

Montrons que π est une bijection.

On suit la trame suivante :

1. Justifier que π est définie de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.
2. Montrer
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \pi(m, n+1) = \pi(m+1, n) + 1 \quad \text{et} \quad \pi(n+1, 0) = \pi(0, n) + 1$$
En déduire que π est surjective.
3. Montrer
$$\forall (m,n,m',n') \in \mathbb{N}^4 \qquad m' + n' \geqslant m + n + 1 \Longrightarrow \pi(m', n') > \pi(m, n)$$
En déduire l'injectivité de π.

Étapes : 1. Les entiers $m+n$ et $m+n+1$ sont consécutifs donc l'un d'eux est pair et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } \pi \text{ est bien définie de } \mathbb{N}^2 \text{ sur } \mathbb{N}.}$$

Variante : On peut observer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \pi(m,n) = n + \sum_{k=1}^{m+n} k \in \mathbb{N}$$

2. On a $\pi(0,0) = 0$ d'où $0 \in \operatorname{Im} \pi$. On vérifie sans peine les relations demandées. Puis, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on observe

$$\pi(m,n) + 1 = \begin{cases} \pi(n+1, 0) & \text{si } m = 0 \\ \pi(m-1, n+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $\pi(m,n) + 1 \in \operatorname{Im} \pi$. Ainsi, l'ensemble $\operatorname{Im} \pi$ et une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et qui vérifie le principe de récurrence et on conclut

$$\boxed{\operatorname{Im} \pi = \mathbb{N}}$$

3. Soient (m,n) et (m',n') dans $\mathbb{N}^2$ avec $(m,n) \neq (m',n')$. Si $m' + n' \geqslant m + n + 1$, il vient

$$\begin{aligned}\pi(m',n') = \frac{(m'+n')(m'+n'+1)}{2} + n' &\geqslant \frac{(m+n+1)(m+n+2)}{2} + n' \\ &\geqslant \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n + m + 1 + n' > \pi(m,n)\end{aligned}$$

c'est-à-dire $$m'+n' > m+n \quad\Longrightarrow\quad \pi(m',n') > \pi(m,n)$$

Par symétrie des rôles, on en déduit

$$m+n \neq m'+n' \quad\Longrightarrow\quad \pi(m,n) \neq \pi(m',n')$$

Supposons $(m,n) \neq (m',n')$. Si $m+n = m'+n'$, alors $n \neq n'$ d'où $\pi(m,n) \neq \pi(m',n')$ et sinon on a également $\pi(m',n') \neq \pi(m,n)$ d'après l'implication précédente. Dans tous les cas, on a donc

$$(m,n) \neq (m',n') \quad\Longrightarrow\quad \pi(m,n) \neq \pi(m',n')$$

Ainsi $$\boxed{\text{L'application } \pi \text{ est une injection de } \mathbb{N}^2 \text{ sur } \mathbb{N}.}$$

Variante : Pour montrer l'inégalité demandée, on peut aussi écrire

$$\pi(m',n') = n' + \sum_{k=1}^{m'+n'} k \geqslant n' + \sum_{k=1}^{m+n+1} k = m+1+n'+n+\sum_{k=1}^{m+n} k = m+1+n'+\pi(m,n)$$

Ainsi, l'application π est surjective et injective et réalise donc une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. $\square$