ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°39

Exercice 1 (***)

Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ croissante. Pour $x \in \,]\,a\,;b\,[$, on note $\delta(x) = f(x^+) - f(x^-)$.

1. Pour n entier non nul, montrer que $\mathrm{E}_n = \left\{x \in \,]\,a\,;b\,[\quad | \quad \delta(x) > \dfrac{1}{n}\right\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
3. Généraliser ce résultat pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. Soient $x_1 < \ldots < x_p$ des éléments de E_n et soient $y_0, \ldots, y_p$ des réels tels que

$$a \leqslant y_0 < x_1 < y_1 < x_1 < \ldots < x_p < y_p \leqslant b$$

Par définition de E_n et croissance de f, on a

$$\forall k \in [\![\, 1\,;\,p \,]\!] \qquad f(y_k) - f(y_{k-1}) \geqslant \frac{1}{n}$$

D'où $$f(b) - f(a) \geqslant f(y_p) - f(y_0) \geqslant \sum_{k=1}^{p} [f(y_k) - f(y_{k-1})] \geqslant \frac{p}{n}$$

On en déduit $p \leqslant n\,[f(b) - f(a)]$ ce qui prouve

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, l'ensemble } \mathrm{E}_n \text{ est fini.}}$$

2. L'ensemble des points des discontinuités D de f est formé éventuellement des points a et b et des points $x \in \,]\,a\,;b\,[$ tels que $\delta(x) > 0$ d'où

$$\mathrm{D} \subset \{a, b\} \cup \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{E}_n$$

Ainsi, l'ensemble D est contenu dans un ensemble qui est une union dénombrable d'ensemble fini donc au plus dénombrable. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des points de discontinuité de } f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R} \text{ est au plus dénombrable.}}$$

3. Notons D l'ensemble des points de discontinuités de f et D_n l'ensemble des points de discontinuités de $f_{|[\,-n\,;n\,]}$ avec n entier. On a $\mathrm{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{D}_n$ union dénombrables d'ensembles au plus dénombrables d'où

$$\boxed{\text{L'ensemble des points de discontinuité de } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est au plus dénombrable.}}$$

Exercice 2 (***)

Un nombre complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ des nombres algébriques est dénombrable.

Corrigé : L'ensemble des polynômes à coefficients rationnels $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ peut s'écrire $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[\mathrm{X}]$. Or, pour n entier, l'ensemble $\mathbb{Q}_n[\mathrm{X}]$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^{n+1}$ qui est dénombrable comme produit fini d'ensembles dénombrables. Ainsi, l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[\mathrm{X}]$ est une union dénombrable d'ensemble dénombrable ce qui prouve que $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ est dénombrable. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, notons $\mathrm{Z}(\mathrm{P})$ l'ensemble des racines complexes de P. Pour $\mathrm{P} \neq 0$, l'ensemble $\mathrm{Z}(\mathrm{P})$ est un ensemble fini. Or, on a

$$\mathscr{A} = \bigcup_{\mathrm{P}\in\mathbb{Q}[\mathrm{X}]\setminus\{0\}} \mathrm{Z}(\mathrm{P})$$

Ainsi, l'ensemble des nombres algébriques est une union dénombrable d'ensemble fini donc est au plus dénombrable. L'ensemble $\mathscr{A}$ est clairement infini puisqu'il contient $\mathbb{Q}$ par exemple et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.}}$$

Remarque : Comme l'ensemble $\mathbb{R}$ est indénombrable, il en résulte qu'il existe des nombres *transcendants*, *i.e.* qui ne sont pas algébriques.

Exercice 3 (***)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

Corrigé : On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sigma(k)}{k^2}$ pour n entier non nul. Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{(2n)^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$$

Comme σ réalise une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} k \geqslant \frac{n^2}{2}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n \geqslant \frac{1}{(2n)^2} \times \frac{n^2}{2} = \frac{1}{8}$$

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$ était convergente, on aurait $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{S}$ avec S un réel et par suite

$$\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{S} - \mathrm{S} = 0$$

ce qui est absurde. Par conséquent

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2} \text{ diverge.}}$$

Exercice 4 (****)

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. Étudier la nature de $\sum \dfrac{\sigma(n)}{n!}$.

Corrigé : Si $\sigma = \mathrm{id}$, la série converge. Mais ce n'est pas toujours le cas. Construisons une permutation σ telle que la série diverge. L'ensemble $\mathrm{D} = \mathbb{N} \setminus \{(2n)!, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable. Notons φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur D. On définit σ sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sigma(2n) = (2n)! \quad \text{et} \quad \sigma(2n+1) = \varphi(n)$$

Par construction, l'application σ est injective et surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. On a

$$\frac{\sigma(2n)}{(2n)!} = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Ainsi $\boxed{\text{La série } \sum \frac{\sigma(n)}{n!} \text{ peut converger ou diverger.}}$

Exercice 5 (**)

Pour t réel, on note $\displaystyle \mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$

1. Préciser l'ensemble de définition D de S.
2. Montrer $\displaystyle \forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{1-t^k}$
3. Montrer $\displaystyle \forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{avec} \quad (a_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

Corrigé : 1. Notons $\displaystyle \forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \quad f_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n}$

Pour $t = -1$, l'application f_n n'est pas définie pour les n impairs. Pour $|t| > 1$ et $t = 1$, on a $f_n(t) \not\to 0$ d'où la divergence grossière de la série définissant S. Enfin, pour $|t| < 1$, on a

$$\left| \frac{t^n}{1+t^n} \right| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(|t|^n\right)$$

d'où la convergence absolue de la série. Ainsi

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de S est } \mathrm{D} = \,]-1\,;1\,[.}$$

Remarque : Si on préfère écrire des équivalents plutôt que des grand O, il faut distinguer t non nul et t nul.

2. On a $\displaystyle \forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} t^{kn} \right)$

Vérifions la sommabilité de la famille $\left(|t|^{kn}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$. La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} |t|^{kn}$ est géométrique de raison $|t|^n < 1$ donc convergente avec

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |t|^{kn} = \frac{|t|^n}{1-|t|^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(|t|^n\right)$$

et comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} |t|^n$ converge en tant que série géométrique de raison $|t| < 1$, on a bien la sommabilité de $\left(|t|^{kn}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$. D'après le théorème de Fubini, il vient

$$\boxed{\forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} t^{kn} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{1-t^k}}$$

3. Posons $\displaystyle \forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_p = \left\{ (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid k \times n = p \right\}$

La famille $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^{*2}$ et on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_p = \{(k, p/k),\ k \in [\![\, 1\,;\, p\,]\!] \quad \text{et} \quad k \text{ divise } p\}$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$\forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,n)\in \mathrm{A}_p} (-1)^{k-1} t^{kn} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k|p} (-1)^{k-1} \right) t^p$$

Ainsi $\boxed{\forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\, t^p \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \qquad a_p = \sum_{2k+1|p} 1 - \sum_{2k|p} 1.}$

Exercice 6 (****)

Soit n entier non nul, α réel et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{1}{\|x\|^\alpha} \right)_{x \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}}$$

Corrigé : Les normes dans $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Ainsi, il existe $a, b > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad a\|x\| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant b\|x\|$$

d'où
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \frac{1}{b^\alpha \|x\|^\alpha} \leqslant \frac{1}{\|x\|_\infty^\alpha} \leqslant \frac{1}{a^\alpha \|x\|^\alpha}$$

Par suite
$$\left(\frac{1}{\|x\|^\alpha} \right)_{x \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}} \text{ sommable} \iff \left(\frac{1}{\|x\|_\infty^\alpha} \right)_{x \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}} \text{ sommable}$$

Posons
$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_p = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \|x\|_\infty = p\}$$

La famille $(\mathrm{I}_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{x \in \mathrm{I}_p} \frac{1}{\|x\|_\infty^\alpha} = \frac{\mathrm{Card}\, \mathrm{I}_p}{p^\alpha}$$

Pour p entier, on a
$$\bigcup_{k=0}^{p} \mathrm{I}_k = [\![\, -p\,;\, p\,]\!]^n \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_p = \left(\bigcup_{k=1}^{p} \mathrm{I}_k \right) \smallsetminus \left(\bigcup_{k=0}^{p-1} \mathrm{I}_k \right)$$

d'où
$$\mathrm{Card}\, \mathrm{I}_p = \mathrm{Card}\, [\![\, -p\,;\, p\,]\!]^n - \mathrm{Card}\, [\![\, -(p-1)\,;\, p-1\,]\!]^n = (2p+1)^n - (2p-1)^n$$

puis
$$(2p+1)^n - (2p-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^{n-k} (1 - (-1)^k) = 2n(2p)^{n-1} + \mathrm{o}_{p\to+\infty}(p^{n-1})$$

Par conséquent

$$\sum_{x \in \mathrm{I}_p} \frac{1}{\|x\|_\infty^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{n2^n}{p^{\alpha-n+1}} > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{p^{\alpha-n+1}} < +\infty \iff \alpha - n + 1 > 1$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{\|x\|^\alpha} \right)_{x \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}} \text{ est sommable si et seulement si } \alpha > n.}$$