ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°37

Exercice 1 (*)

Montrer que $[\,0\,;1\,[$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2 (*)

Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{1+mn}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Exercice 3 (*)

Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{1+m^2n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Exercice 4 (*)

Soit $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(b_i)_{i\in\mathrm{I}}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Montrer que la famille $(\sqrt{a_ib_i})_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable.

Exercice 5 (**)

Soit α réel. Étudier la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(m+n)^\alpha}$.

Exercice 6 (**)

Soient $a>1$ et $b>1$. Étudier la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{a^m+b^n}$.

Exercice 7

Justifier la convergence puis calculer la somme de $\displaystyle\sum\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}\right)$.

Exercice 8 (**)

Justifier la convergence puis calculer la somme de $\displaystyle\sum\frac{n}{2^n}$.

Exercice 9 (**)

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Montrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^{2n}}$$

Exercice 10 (**)

Soit $a > 0$. Montrer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}\,((2n+1)a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\mathrm{sh}\,((2n+1)a)}$$

Exercice 11 (**)

Pour t réel, on note
$$\mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1-t^n}$$

1. Préciser l'ensemble de définition D de S.
2. Montrer
$$\forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)\, t^n$$
   où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 12 (*)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sigma(n) + n^2}$
2. $\dfrac{1}{\sigma(n)^2 + n}$