

Feuille d'exercices n°38

Exercice 1 (**)

Étudier selon $\alpha > 1$ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right)$ et en cas de finitude, exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ de Riemann.

Exercice 2 (***)

Soit α réel. Étudier la somme $\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}$.

Exercice 3 (***)

Soit α réel. Étudier la somme $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{m^\alpha + n^\alpha}$.

Exercice 4 (***)

Montrer l'égalité $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n}$

Exercice 5 (***)

On précise que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p + q^2)(p + q^2 + 1)}$$

En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}$.

Exercice 6 (***)

On précise que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}, m \wedge n = 1} \frac{1}{n^2 m^2}$$

Exercice 7 (****)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n) + n}$.