ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°39

Exercice 1 (***)

Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ croissante. Pour $x \in \,]\,a\,;b\,[$, on note $\delta(x) = f(x^+) - f(x^-)$.

1. Pour n entier non nul, montrer que $\mathrm{E}_n = \left\{ x \in \,]\,a\,;b\,[\quad | \quad \delta(x) > \dfrac{1}{n} \right\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
3. Généraliser ce résultat pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Indications : 1. Pour n entier non nul, considérer $x_1 < \ldots < x_p$ dans E_n puis $0 \leqslant y_0 < x_1 < y_1 < x_1 < \ldots < x_p < y_p \leqslant b$ puis $f(y_k) - f(y_{k-1})$ pour $k \in [\![\,1\,;\,p\,]\!]$.
2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est inclus dans un ensemble au plus dénombrable décrit à l'aide des ensembles E_n.
3. Considérer les restrictions $f_{\big|[\,-n\,;n\,]}$ pour n entier.

Exercice 2 (***)

Un nombre complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ des nombres algébriques est dénombrable.

Indications : Avec l'égalité $\mathbb{Q}[\mathrm{X}] = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[\mathrm{X}]$, établir que $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ est dénombrable puis notant $\mathrm{Z}(\mathrm{P})$ l'ensemble des racines complexes de P pour $\mathrm{P} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, décrire $\mathscr{A}$ à l'aide de $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.

Exercice 3 (***)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Indications : Poser $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$ pour n entier non nul puis minorer $\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n$ pour conclure.

Exercice 4 (****)

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. Étudier la nature de $\displaystyle\sum \frac{\sigma(n)}{n!}$.

Indications : Exhiber un choix de σ telle que la série converge. Puis, considérer l'ensemble $\mathrm{D} = \mathbb{N} \setminus \{(2n)!, n \in \mathbb{N}\}$ et construire une permutation σ prenant des valeurs bien choisies sur les entiers de la forme $(2n)!$ avec n entier.

Exercice 5 (**)

Pour t réel, on note
$$\mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$$

1. Préciser l'ensemble de définition D de S.
2. Montrer $\qquad \forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{1-t^k}$
3. Montrer $\qquad \forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{avec} \quad (a_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

Indications : 2. Utiliser le théorème d'interversion des sommes.
3. Considérer la partition $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $(\mathbb{N}^*)^2$ avec $\mathrm{A}_p = \left\{(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \;\middle|\; k \times n = p\right\}$.

Exercice 6 (****)

Soit n entier non nul, α réel et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la sommabilité de la famille
$$\left(\frac{1}{\|x\|^\alpha}\right)_{x\in\mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}}$$

Indications : Se ramener au cas de la norme $\|\cdot\|_\infty$ puis considérer le recouvrement disjoint $(\mathrm{I}_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}$ avec $\mathrm{I}_p = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \|x\|_\infty = p\}$.