CH EM6 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE ILLIMITE

Dans tout le chapitre on se place dans le vide (ou tout milieu ayant les propriétés électromagnétiques du vide ε_0 , μ_0) illimité (pas de CAL) en l'absence de charge et de courant (ρ=0 et $\vec{j} = \vec{0}$)

I. Equation de propagation du champ électromagnétique dans une région sans charge ni courant

1) Equation de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$: $\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ et $\boxed{\vec{\Delta}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

Démo : (CE) *Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell*

2) Equation de d'Alembert :

Définition d'une onde : On appelle onde le phénomène de propagation, à la suite d'une perturbation, d'une grandeur physique appelée vibration. Cette propagation se fait sans transport de matière.
On ne peut appeler onde qu'un phénomène dépendant à la fois de l'espace et du temps : s(x,y,z,t).
La dépendance doit être effective, une constante n'est pas une onde.

On appelle à 3 dimensions l'équation différentielle : $\boxed{\Delta s - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$

On appelle équation de d'Alembert à 1 dimension l'équation différentielle :

Vitesse de propagation de l'onde : Les ondes solutions de l'équation de d'Alembert se déplacent à la vitesse (ou célérité) C .

3) Célérité des ondes électromagnétiques :

E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z vérifient dans le vide l'équation de d'Alembert avec la célérité :

c = $\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1}$

Le problème du référentiel :

1887 Expérience de Michelson et Morley
1905 Einstein énonce les bases de la relativité restreinte. Il énonce le principe de relativité (relativité restreinte):
« L'ensemble des lois de la physique a la même formulation dans tous les référentiels galiléens »
Les OEM se propagent donc dans le vide de façon isotrope avec la même célérité c par rapport à tout référentiel galiléen.
c est la vitesse limite de tout objet et de toute information.

II. Onde plane progressive monochromatique

1) L'onde plane (homogène) (OPh)

Définition : Une onde s est plane (homogène) si,

Intérêt : Une source ponctuelle émet à priori une onde sphérique s(r,t) en coordonnées sphériques :

Observée à grande distance de la source, cette onde sphérique peut être considérée localement comme une onde plane.

2) L'onde plane (homogène) progressive (OPhP)

Solution générale de l'équation de d'Alembert à 1 dimension :
Changement de variable dans l'équation de d'Alembert :

Posons $\begin{cases} u = t - x/c \\ v = t + x/c \end{cases}$

L'équation de d'Alembert devient : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0$

Solutions : s = f(u)+g(v) donc s(x,t) = f(t-x/c) + g(t+x/c)

Interprétation des solutions : *(CE) Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant*
Pour f seule :

f(t-x/c) se propage sans déformation suivant (Ox) à la vitesse c dans le sens de $\vec{u}_x$. On dit que f est une onde progressive de direction $\vec{u}_x$. De même g(t+x/c) est une onde progressive de direction $-\vec{u}_x$ et de vitesse c.

Définition d'une onde plane (homogène) progressive de direction $\vec{u}$ (OPP) :

C'est une onde de la forme $\boxed{s(M,t) = f(\qquad\qquad)}$. Elle se propage à la vitesse c dans la direction et le sens de $\vec{u}$

La solution la plus générale de l'équation de d'Alembert à une dimension est donc la superposition d'une OPP dans le sens des x croissants et d'une OPP en sens inverse.

CE : Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension.

3) <u>L'onde plane (homogène) progressive monochromatique</u> (OPhPM) ou sinusoïdale ou harmonique

a) <u>Définition d'une OPhPM</u> : Une OPhPM de pulsation ω est une onde de la forme :

s(M,t) =

où S_0 est

$\varphi = \omega t - \vec{k} \bullet \overrightarrow{OM} + \varphi_0$ est

$\vec{k}$ est un vecteur constant appelé

$k = \|\vec{k}\|$ est le module du vecteur d'onde, $\vec{u} = \dfrac{\vec{k}}{k}$ donne

s est une OPhP de direction $\vec{u}$ car

Si $\vec{u} = \vec{u}_x$, s(M,t) =

b) <u>Vitesse de phase</u>

Définition de la vitesse de phase v_φ :

Cas d'une OPhPM suivant $\vec{u}_x$:

Expression : $\boxed{v_\varphi =\qquad}$

c) <u>Surfaces d'ondes</u>

Définition : Une surface d'onde est une surface sur laquelle

Interprétation : C'est l'ensemble des points atteints par l'onde au bout d'une même durée.

Exemples : Pour une OPhPM suivant $+\vec{u}_x$, les surfaces d'onde sont les plans

Autre définition d'une onde plane : C'est une onde dont les surfaces d'onde sont des

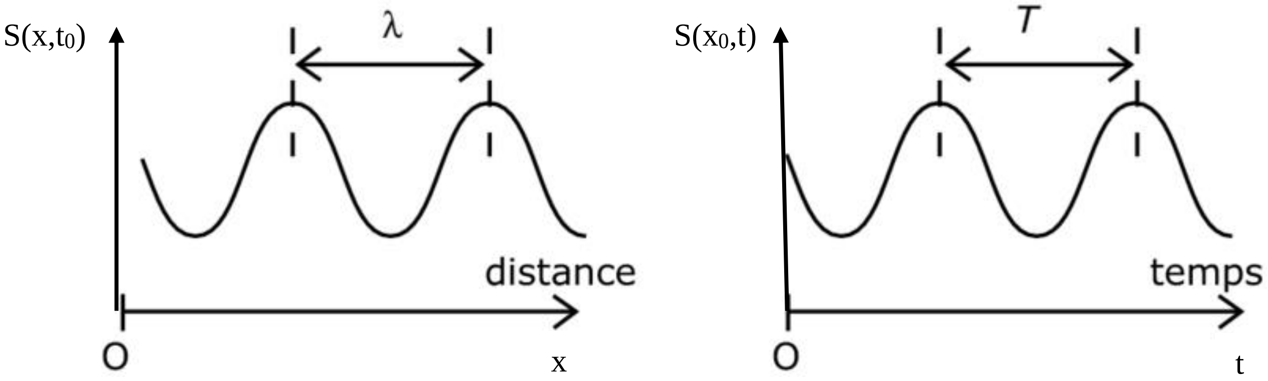
Autres types d'ondes :

Onde plane inhomogène (OPiPM): s(M,t) = $S_0(M)\cos(\omega t - \vec{k} \bullet \overrightarrow{OM} + \varphi_0)$

Onde sphérique : $s(M,t) = S_0(M).\cos(\varphi(r = OM, t))$ en coordonnées sphériques

Ses surfaces d'onde sont des sphères.

d) <u>Double périodicité - Longueur d'onde</u>



Périodicité temporelle : Période T = Fréquence f =

Périodicité spatiale : Période λ =

Définition de la longueur d'onde λ : C'est la période spatiale de l'onde λ =

e) <u>Notation complexe</u>

Définition : Si s(M,t) = $S_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$, on définit $\underline{s}$ par s = Re($\underline{s}$) avec $\underline{s} = S_0.e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$

Signification physique d'un éventuel k complexe :
si $\underline{k}$=k'-ik'' avec k'>0 et k''>0 alors

4) **<u>Autres types de solutions de l'équation de d'Alembert :</u>**

- **<u>Onde sphérique progressive monochromatique :</u>**

Elle est à priori de la forme S(M,t) = $S_0(r)\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$.

Rem : On peut montrer que, pour vérifier l'équation de d'Alembert ou pour des raisons énergétiques, son amplitude est en 1/r : S(M,t) = $\frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$

- **<u>Onde plane stationnaire monochromatique en électromagnétisme :</u>** *(CE)*

C'est une onde de la forme S(M,t) = f(M).g(t) avec

III. Onde électromagnétique plane (homogène) progressive monochromatique OEMPhPM

1) L'onde électromagnétique plane (homogène) progressive monochromatique en notation complexe

a) Expression : On montrera au III-2-b qu'une OEMPhPM est toujours transversale (champs perpendiculaires à la direction de propagation) donc, si on choisit l'axe (Ox) dans la direction et le sens de sa propagation, elle est de la forme :

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ E_{0z}\cos(\omega t - kx + \varphi_{0z}) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{B} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ B_{0y}\cos(\omega t - kx + \varphi'_{0y}) \\ B_{0z}\cos(\omega t - kx + \varphi'_{oz}) \end{array} \right.$$

Expression générale d'une OEMPhPM de vecteur d'onde $\vec{k}$ dans un système de coordonnées mal choisi :

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi_{0x}) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi_{0y}) \\ E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi_{0z}) \end{array} \right. \text{ avec le vecteur d'onde } \vec{k} = \left| \begin{array}{l} k_x \\ k_y \\ k_z \end{array} \right. \text{ et le vecteur position } \overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

donc $\vec{k} \bullet \overrightarrow{OM} = k_x x + k_y y + k_z z$ et $\vec{E} \bullet \vec{k} = 0$

On associe à $\vec{E}$ le champ complexe $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{i(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})}$ avec $\underline{\vec{E}_0} = \left| \begin{array}{l} E_{0x}e^{i\varphi_{0x}} \\ E_{0y}e^{i\varphi_{0y}} \\ E_{0z}e^{i\varphi_{0z}} \end{array} \right.$ son l'amplitude complexe.

b) Expression des opérateurs de l'analyse vectorielle en notation complexe :

Seulement pour une OEMPPM $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$,

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}} \qquad \overrightarrow{rot}(\underline{\vec{E}}) = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$div(\underline{\vec{E}}) = -i\vec{k}.\underline{\vec{E}} \qquad \vec{\Delta}(\vec{E}) = -k^2\underline{\vec{E}}$$

Moyen mnémotechnique : $\vec{\nabla}$ est remplacé par $-i\vec{k}$

Démo :

Rem importante : si la notation complexe est en $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ *alors* $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{E}}$ et $\vec{\nabla} = i\vec{k}$

2) Structure de l'onde électromagnétique plane progressive monochromatique OEMPPM

a) Relation de dispersion dans le vide

La relation de dispersion est la relation

Dans le vide c'est l'équation de d'Alembert qui permet de montrer en notation complexe que $\boxed{k = \quad}$

Démo : (CE) Déterminer la relation de dispersion

b) Relation de structure

Si $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{i(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})}$, on peut montrer en notation complexe :

La transversalité du champ : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à $\vec{k}$

Démo :

La relation de structure : $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$ donc $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct

Démo :

Rem : dans le vide pour une OEMPhPM suivant $+\vec{u}_x$: $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}}$

c) Conséquence sur la force de Lorentz

Tant que la vitesse de la particule est faible devant la vitesse de la lumière, la force magnétique d'une OEM est négligeable devant la force électrique. (Mais ce n'est pas vrai pour des champs statiques à priori)
Démo pour une OEMPhPM :

3) L'énergie transportée par l'onde électromagnétique plane progressive

(CE) Exprimer le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique associés à une onde plane progressive monochromatique.
Effectuer une étude énergétique dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique

a) Densité volumique d'énergie électromagnétique (pour une OEMPhPM)

Les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique sont égales et $u = \varepsilon_0 E^2$
Démo :

b) <u>Vecteur de Poynting</u> (pour une OEMPhPM de direction $\vec{e}$)

$\vec{R} = \varepsilon_0 E^2 c\vec{e} = uc\vec{e}$

Démo :

Interprétation : Si on établit que le vecteur de Poynting s'écrit $\vec{R} = u\vec{v}$ où u est la densité volumique d'énergie, alors $\vec{v}$ est la vitesse de propagation de l'énergie.

Démo :

Conclusion pour une OPPM dans le vide : $\vec{v} = c\vec{e}$ donc l'énergie se propage à la vitesse c dans le sens et la direction de l'onde.

Méthode : Mettre le vecteur de Poynting sous la forme $\vec{R} = u\vec{v}$ permet de trouver la vitesse de propagation de l'énergie pour d'autres types d'ondes dans le vide ou dans d'autres milieux de propagation.

c) <u>Valeurs moyennes des grandeurs énergétiques en notation complexe</u> (pour une OEMPPM)

- **Il faut revenir en notation réelle pour calculer les grandeurs quadratiques** : u, $\vec{R}$, $p = \vec{j}.\vec{E}$
- Mais on peut calculer leurs valeurs moyennes dans le temps en notation complexe :

$\left\langle \vec{R} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0})$ avec $\underline{\vec{B}}^*$ le complexe conjugué de $\underline{\vec{B}}$

$\langle P \rangle = \frac{1}{2} Re(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*)$

$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\left(\varepsilon_0 \left\| \underline{\vec{E}} \right\|^2 + \frac{\left\| \underline{\vec{B}} \right\|^2}{\mu_0} \right)$

Démo :

IV. <u>Intérêt de l'OPPM : paquets d'ondes</u>

1) <u>L'OPPM n'existe pas</u>

(CE) Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique
Une OPPM d'extension spatiale et temporelle infinie ne peut pas exister physiquement car elle aurait

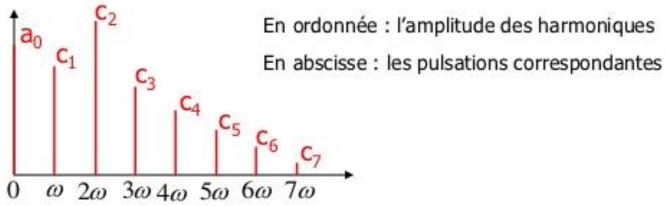
En pratique la source est d'extension spatiale finie donc loin de la source l'onde est quasi-sphérique et son amplitude s'atténue en 1/r.
Une onde réelle est d'énergie finie donc de carré sommable.

2) <u>Transformée de Fourier d'une fonction</u>

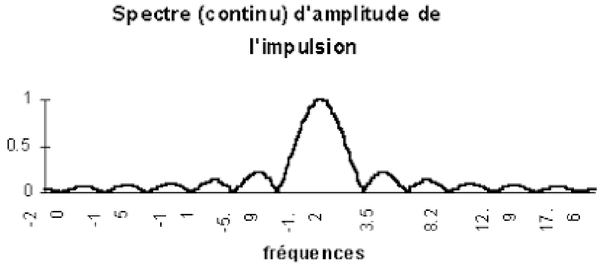
Si f(t) est une fonction de carré sommable, on peut la décomposer en composantes sinusoïdales par une intégrale de Fourier : $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ avec $\hat{f}(\omega) = TF(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

Interprétation :

- Le spectre d'une fonction périodique est discret (elle est décomposable en série de Fourier)



- Le spectre d'une fonction d'énergie finie est continu (elle s'écrit comme une intégrale de Fourier)



3) <u>Paquet d'ondes</u> (somme d'OPPM)

Une OPPM suivant $\vec{u}_x$ $\underline{s}(x,t) = S_0.e^{i(\omega t - kx)}$ seule n'est pas physiquement réalisable.
Mais toute OPP est représentable par une intégrale de Fourier qui la définit comme un **paquet d'ondes** :

$\boxed{\underline{s}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{i(\omega t - kx)}d\omega}$ avec $S(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\hat{S}(\omega)$

S est la somme continue d'une infinité d'OPPM de pulsation quelconque ω et d'amplitude S(ω)dω.

V. Polarisation des ondes électromagnétiques

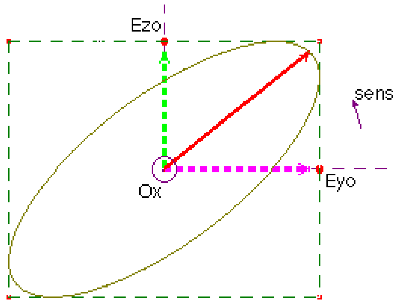
1) Les différents états de polarisation des OEM

a) Définition de la polarisation:

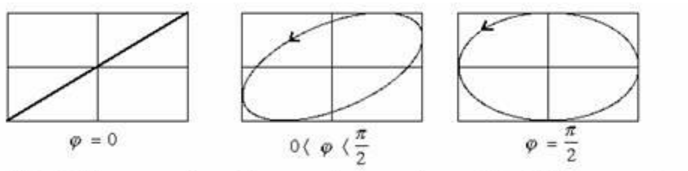
La direction de polarisation d'une onde électromagnétique est

Une OEMPPM se propageant suivant $\vec{u}_x$ présente un état de polarisation particulier si l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{O_0M} = \vec{E}(x_0,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t - kx_0) \\ E_{0z}\cos(\omega t - kx_0 + \Phi) \end{pmatrix}$

avec $O_0(x_0,0,0)$ (dans un plan d'onde x=x_0) décrit au cours du temps une courbe particulière.

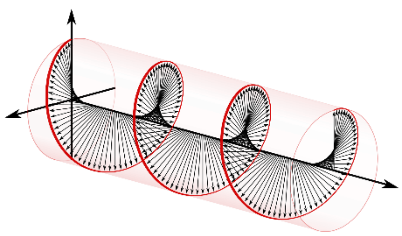


Si Φ est constant, pour une valeur quelconque de Φ cette courbe est une ellipse,
on dit que l'onde est polarisée elliptiquement. (cas général)



Si Φ = 0 ou π, alors l'ellipse est aplatie en un segment de droite.
On dit que l'onde est polarisée rectilignement.

Si $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ et $E_{0y} = E_{0z}$ l'onde est polarisée circulairement.



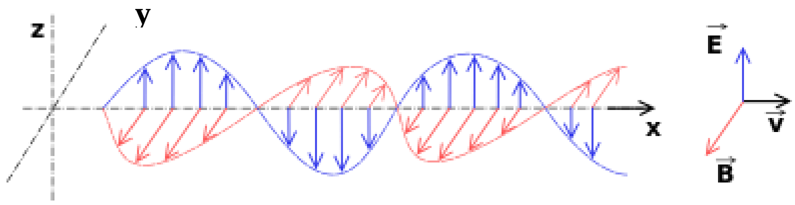
Pour une **lumière naturelle** (lumière du soleil) (et pour la plupart des sources comme les lampes à filament…), Φ varie aléatoirement dans le temps donc **l'onde n'est pas polarisée**.

b) Onde polarisée rectilignement :

C'est le cas où le

Exemple d'une OEMPPM suivant $\vec{u}_x$ polarisée rectilignement suivant (OZ) : $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_Z$

Description dans l'espace :

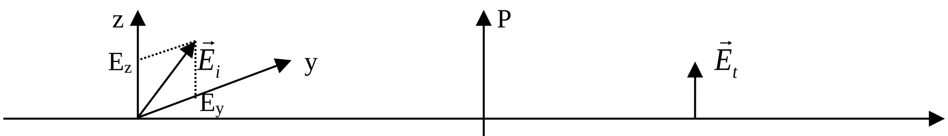


Description dans le plan d'onde $x = x_0$:

2) **Production et analyse d'une lumière polarisée :** polariseur, analyseur, loi de Malus

a) **Polariseur :**

Un polariseur est un système optique permettant de transformer une lumière de polarisation quelconque en une lumière polarisée rectilignement.
La direction de polarisation de l'onde transmise est appelée *axe de transmission du polariseur*.



Champ incident $\vec{E}_i\,(0,E_y,E_z)$ Champ transmis $\vec{E}_t\,(0,0,E_z)$

Polariseur d'axe (Oz)

En TP nous utilisons une *lame polaroïd*. Elle est réalisée en étirant un film de polymères ce qui a pour effet d'aligner les molécules. Une telle feuille laisse passer sans atténuation une onde polarisée rectilignement dans la direction perpendiculaire à la direction des molécules alors qu'elle absorbe une onde polarisée rectilignement dans la direction parallèle aux molécules. L'onde polarisée parallèlement aux molécules met en mouvement des électrons de conduction pouvant se déplacer le long des molécules et perd ainsi son énergie.

b) **Analyseur :**

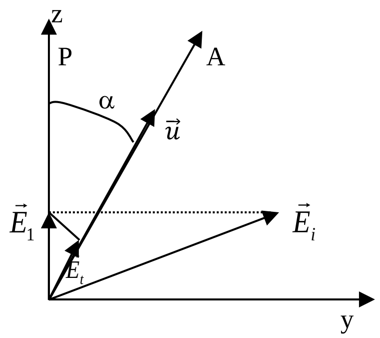
Pour analyser une lumière polarisée, on l'observe à travers une lame polaroïd qu'on peut alors appeler *analyseur*.

(CE) : reconnaître une onde polarisée rectilignement ou circulairement

Si une onde incidente est polarisée rectilignement selon la direction perpendiculaire à l'axe de transmission de l'analyseur alors aucune lumière ne sort de l'analyseur (analyseur-polariseur).
Si l'onde incidente est polarisée circulairement, l'onde transmise par l'analyseur est de même intensité quelle que soit la direction de l'analyseur (on le fait tourner pour vérifier).
Donc une onde est polarisée rectilignement si

c) **Loi de Malus :**

Un champ incident de direction de propagation (Ox) passe à travers un polariseur P et un analyseur A qui sont deux lames polaroïd perpendiculaires à (Ox). P et A font entre eux un angle α. Soit (Oz) la direction de l'axe du polariseur et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la direction de l'axe de l'analyseur.



Champ incident $\vec{E}_i\,(0,E_y,E_z)$

Champ transmis par le polariseur :
$\vec{E}_1 =$

Champ transmis par l'analyseur :
$\vec{E}_t =$

D'où l'intensité lumineuse transmise :

$$I_t = \left\langle \left\| \vec{E}_t \right\|^2 \right\rangle_t =$$

Posons $I_0 = \left\langle E_z^2 \right\rangle_t$ c'est l'intensité de l'onde ayant franchi le polariseur P.

On en déduit **la loi de Malus :** $\mathbf{I_t =}$

où α est l'angle entre le polariseur et l'analyseur

Cette loi sera vérifiée en travaux pratiques.