ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Programme de colles

⚠ Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 10 **02/12/24 - 06/12/24**

Programme :

Familles sommables :

- Ensemble dénombrable, dénombrabilité d'une partie infinie de $\mathbb{N}$, ensemble fini ou dénombrable en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, ensemble au plus dénombrable, dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, dénombrabilité d'un produit fini d'ensembles dénombrables, dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{Q}$, union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, indénombrabilité de $\mathbb{R}$;
- Somme d'une famille à valeurs dans $[0\,;+\infty]$, sommabilité, dénombrabilité du support d'une famille sommable, linéarité du symbole Σ, lien avec les séries, comparaison, théorème de sommation par paquets, invariance de la somme par permutation ;
- Famille de réels ou complexes, sommabilité, somme, espace vectoriel $\ell^1(\mathrm{I})$, linéarité du symbole Σ, croissance de Σ, inégalité triangulaire, théorème de sommation par paquets, invariance de la sommabilité et de la somme par permutation, lien avec les séries ;
- Sommes doubles de familles à valeurs dans $[0\,;+\infty]$, de familles de termes réels ou complexes, théorèmes de Fubini, produit de Cauchy, théorème du produit de Cauchy.

Suites de fonctions :

- Convergence simple d'une suite de fonctions ;
- Théorème de convergence dominée ;
- Convergence uniforme, la convergence uniforme implique la convergence simple, interprétation de la convergence uniforme avec la norme infinie ;
- Limite uniforme d'une suite de fonctions continues, cas d'une limite uniforme sur tout segment, théorème de la double limite ;
- Intégrale fonction de la borne supérieure pour une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, intégrale sur un segment d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément ;
- Suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ convergeant simplement et dont la suite des fonctions dérivées convergent uniformément sur tout segment, extension au cas d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Questions de cours : (avec preuve sauf mention contraire)

1. Lien entre famille sommable indexée par $\mathbb{N}$ et série (pour termes positifs et réels ou complexes) (sans preuve) ;
2. Théorème de sommation par paquets (pour termes positifs et réels ou complexes) (sans preuve) ;
3. Théorèmes de Fubini (pour termes positifs et réels ou complexes) (sans preuve) ;
4. Théorème du produit de Cauchy ;
5. Théorème de convergence dominée (sans preuve) ;
6. Mise en œuvre du théorème de convergence dominée sur l'exemple (naïf) :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$
7. La suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers u si et seulement si $u_n - u$ est bornée à partir d'un certain rang et $\|u_n - u\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
8. Limite uniforme sur un voisinage de a d'une suite de fonctions continues en a ;
9. Théorème de la double limite (sans preuve) ;
10. Limite de l'intégrale fonction de la borne supérieure d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment ;
11. Permutation limite/intégrale pour une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $[\,a\,;b\,]$;
12. Contre-exemple $f_n(t) = n^2t^n(1-t)$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$ à la permutation limite/intégrale pour illustrer l'importance d'une domination ou d'une convergence uniforme. ;
13. Suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ convergeant simplement et dont la suite des fonctions dérivées convergent uniformément sur tout segment ;
14. Extension au cas d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ (sans preuve).