ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°28

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$. Représenter les boules unités fermées pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : On obtient

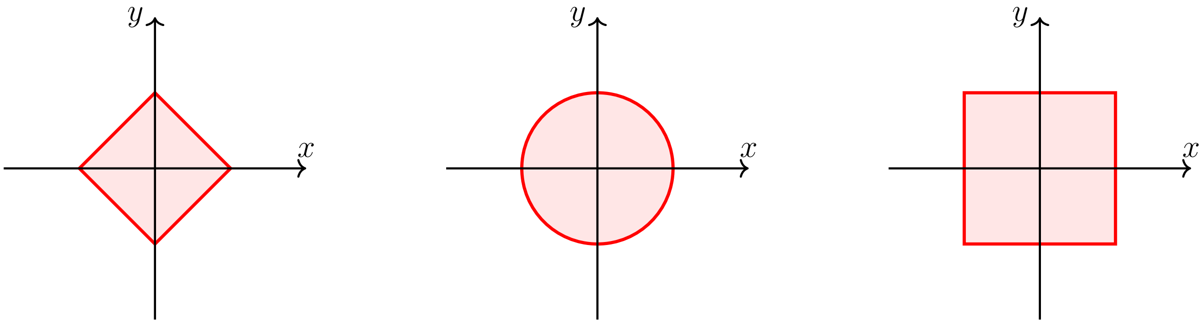

FIGURE 1 – Boules unités ouvertes pour $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$

Exercice 2 (*)

Déterminer la nature topologique de $\Delta = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad | \quad x_1 = \ldots = x_n\}$ puis préciser $\bar{\Delta}$ et $\mathring{\Delta}$.

Corrigé : Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, on pose $\varphi_i : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, x \mapsto x_{i+1} - x_i$ pour $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. On a

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^{n-1} \varphi_i^{-1}(\{0\})$$

Il s'ensuit que Δ est fermé comme intersection d'images réciproques de fermé par des applications polynomiales donc continues. Soit $x \in \mathring{\Delta}$. Il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans Δ et par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$(x_1 + \varepsilon, x_2, \ldots, x_n) \in \Delta$$

ce qui est faux. On conclut

$$\boxed{\bar{\Delta} = \Delta \quad \text{et} \quad \mathring{\Delta} = \varnothing}$$

Variante : Pour la fermeture de Δ, on peut aussi considérer $\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i^2$ continue car polynomiale et observer $\Delta = \varphi^{-1}(\{0\})$.

Exercice 3 (*)

Montrer que le graphe d'une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue avec I intervalle fermé est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : Soit $(x_n,y_n)_n \in \Gamma_f^{\mathbb{N}}$ avec $(x_n,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y) \in \mathbb{R}^2$. En particulier, on a $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{I}$ par fermeture de I puis $y_n = f(x_n)$ pour tout n entier. Par continuité de f, il vient $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ d'où $(x,y) = (x,f(x)) \in \Gamma_f$. On conclut

$$\boxed{\text{Le graphe d'une application continue est un fermé de } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 4 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A un fermé non vide. On suppose que $x \mapsto \mathrm{d}(x,\mathrm{A})$ est convexe.

1. Montrer que A est convexe.
2. Le résultat a-t-il encore lieu sans l'hypothèse de fermeture de A ?

Corrigé : 1. Soit $(a,b) \in \mathrm{A}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$\mathrm{d}(\lambda a + (1-\lambda)b, \mathrm{A}) \leqslant \lambda \mathrm{d}(a,\mathrm{A}) + (1-\lambda)\mathrm{d}(b,\mathrm{A}) = 0$$

Par caractérisation métrique d'appartenance à un fermé, il s'ensuit que $\lambda a + (1-\lambda)b \in \mathrm{A}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble A est convexe.}}$$

2. Avec $\mathrm{A} = \mathbb{R}^*$ (ou $\mathrm{A} = \mathbb{Q}$), on a $\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) = 0$ pour tout x réel d'où $x \mapsto \mathrm{d}(x,\mathrm{A})$ convexe et bien sûr l'ensemble A ne l'est pas.

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A, B des parties de E avec A ou B ouvert. Montrer que A + B est un ouvert.

Corrigé : Supposons A ouvert. On a $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \bigcup\limits_{b\in\mathrm{B}} (b+\mathrm{A})$. Montrer que pour $b \in \mathrm{B}$, on a $b+\mathrm{A}$ ouvert. Soit $x \in b+\mathrm{A}$, autrement dit $x = b+a$ avec $a \in \mathrm{A}$. Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{A}$. Par suite, pour $y \in \mathrm{B}(x,r)$, notant $u = y-b-a$, on a $\|u\| < r$ puis

$$y = b+a+u \in b + \mathrm{B}(a,r) \subset b+\mathrm{A}$$

autrement dit
$$\mathrm{B}(x,r) \subset b+\mathrm{A}$$

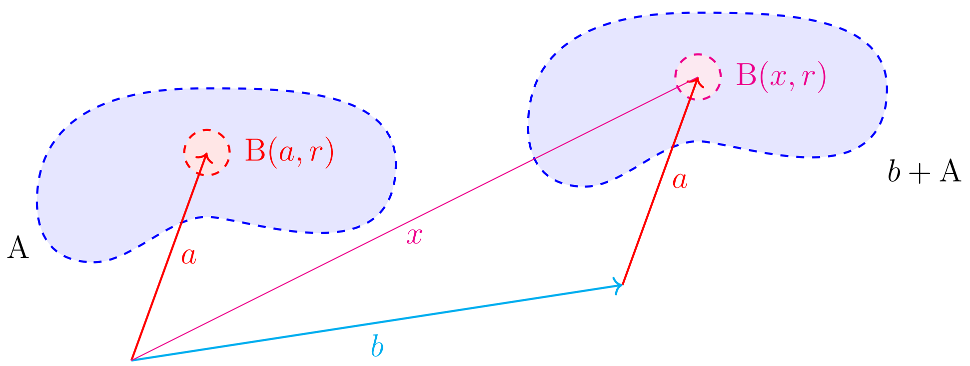

FIGURE 2 – Ouvert $b+\mathrm{A}$

Ceci prouve que $b+\mathrm{A}$ est ouvert pour tout $b \in \mathrm{B}$ et comme une union d'ouverts est un ouvert, on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble A + B est ouvert.}}$$

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A, B des parties de E.

1. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, comparer $\mathring{\mathrm{A}}$ avec $\mathring{\mathrm{B}}$ et $\bar{\mathrm{A}}$ avec $\bar{\mathrm{B}}$.
2. Comparer $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\circ}$ avec $\mathring{\mathrm{A}} \cup \mathring{\mathrm{B}}$ puis $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^{\circ}$ avec $\mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$.
3. Même question pour l'adhérence.

Corrigé : 1. Pour $x \in \mathring{\mathrm{A}}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ d'où $x \in \mathring{\mathrm{B}}$. Pour $x \in \bar{\mathrm{A}}$, on a $\mathrm{B}(x, r) \cap \mathrm{B} \supset \mathrm{B}(x, r) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$ pour tout $r > 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } \mathrm{A} \subset \mathrm{B}, \text{ on a } \mathring{\mathrm{A}} \subset \mathring{\mathrm{B}} \text{ et } \bar{\mathrm{A}} \subset \bar{\mathrm{B}}.}$$

2. On a $\mathrm{A} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ d'où

$$\boxed{\mathring{\mathrm{A}} \cup \mathring{\mathrm{B}} \subset (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\circ}}$$

Avec $\mathrm{A} = \,]-1\,;0]$ et $\mathrm{B} = [0\,;1\,[$, on a $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\circ} = \,]-1\,;1\,[$ et $\mathring{\mathrm{A}} \cup \mathring{\mathrm{B}} = \,]-1\,;1\,[\smallsetminus \{0\}$. Avec $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$, on trouve $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^{\circ} \subset \mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$. Soit $x \in \mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$. Il existe des boules ouvertes $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{B}(x, s) \subset \mathrm{B}$. Notant $\eta = \min(r, s)$, on a $\mathrm{B}(x, \eta) \subset \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ d'où $x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^{\circ}$. Ainsi

$$\boxed{\mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^{\circ}}$$

Variante : Pour $\mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}} \subset (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^{\circ}$, on peut remarquer que $\mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$ est un ouvert inclus dans $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ d'où l'inclusion souhaitée par maximalité de l'intérieur comme ouvert contenu dans la partie considérée.

3. Par complémentarité, on obtient

$$\boxed{\bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} \subset \bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}}$$

Avec $\mathrm{A} = [-1\,;0\,[$ et $\mathrm{B} = \,]\,0\,;1]$, on a $\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}} = \{0\}$ tandis que $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \varnothing$. On peut aussi considérer le complémentaire de l'exemple précédent (moins agréable).

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et F un fermé de E.

1. Montrer que F peut s'écrire comme image réciproque d'un fermé par une application continue de E dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que F peut s'écrire comme intersection décroissante d'ouverts de E.

Corrigé : 1. On considère $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$. L'application φ est continue car 1-lipschitzienne et on a

$$\boxed{\mathrm{F} = \varphi^{-1}(\{0\}) = \varphi^{-1}(]-\infty\,;0\,])}$$

2. En s'inspirant du résultat précédent, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{U}_n = \varphi^{-1}\left(\left]-\infty\,;\tfrac{1}{n}\right[\right)$$

Les U_n sont des ouverts en tant qu'images réciproques d'ouverts par une application continue. Puis, on a

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{U}_n = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\infty\,;\frac{1}{n}\right[\right) = \varphi^{-1}(]-\infty\,;0\,]) = \varphi^{-1}(\{0\}) = \mathrm{F}$$

La décroissance des U_n est évidente et on a donc montré

$$\boxed{\text{Tout fermé de E peut s'écrire comme intersection décroissantes d'ouverts.}}$$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A, B des parties de E. On note $C = \bar{\mathring{A}}$. Montrer

$$(A \setminus B)^\circ = \mathring{A} \setminus \bar{B} \qquad \mathring{\bar{C}} = C$$

Corrigé : On a

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B)^\circ &\iff \exists r > 0 \quad | \quad B(x,r) \subset A \quad \text{et} \quad B(x,r) \cap B \neq \varnothing \\ &\iff x \in \mathring{A} \quad \text{et} \quad x \notin \bar{B} \end{aligned}$$

Puis, on a $\mathring{C} \subset C$ d'où $\bar{\mathring{C}} \subset \bar{C} = C$. Réciproquement, soit $x \in C$. Montrons $x \in \bar{\mathring{C}}$, c'est-à-dire que pour $r > 0$, on a $B(x,r) \cap \mathring{C} \neq \varnothing$. Or, comme $\mathring{A} \subset C$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{C}$ et

$$x \in C = \bar{\mathring{A}} \quad \Longrightarrow \quad B(x,r) \cap \mathring{A} \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad B(r,x) \cap \mathring{C} \neq \varnothing$$

ce qui prouve l'autre inclusion. On conclut

$$\boxed{(A \setminus B)^\circ = \mathring{A} \setminus \bar{B} \qquad \bar{\mathring{C}} = C}$$

Exercice 9 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et F un sev de E.

1. Montrer que $\bar{F}$ est un sev de E.
2. Montrer qu'un hyperplan est soit dense, soit fermé.

Corrigé : 1. On a $0 \in F \subset \bar{F}$. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ dans $F^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. On a $(\lambda x_n + y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et

$$\lambda x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda x + y \in \bar{F}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble } \bar{F} \text{ est un sev de E.}}$

2. Supposons $\bar{H} \neq H$. Soit $x_0 \in \bar{H} \setminus H$. Comme H est un hyperplan, on a

$$E = H \oplus \operatorname{Vect}(x_0) \subset \bar{H} \subset E$$

Ainsi $\boxed{\text{Dans un } \mathbb{K}\text{-ev, un hyperplan est soit dense, soit fermé.}}$

Exercice 10 (**)

Montrer la continuité de l'application qui à $M \in GL_n(\mathbb{K})$ associe son inverse.

Corrigé : Il s'agit de l'application définie par

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{K}) \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \operatorname{Com} M^\top$$

Le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice donc les coordonnées de la comatrice également et par conséquent, les coordonnées de l'inverse sont fonctions rationnelles des coefficients de la matrice. Par conséquent

$$\boxed{\text{L'inverse matricielle est une application continue.}}$$

Exercice 11 (**)

Étudier la continuité éventuelle des applications suivantes :

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Arctan}(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ 2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^y}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ e^x & \text{sinon}\end{cases}$

Corrigé : 1. On a $\qquad \forall x\in\mathbb{R}^* \qquad f(x,x)=\dfrac{\operatorname{Arctan} x^2}{2x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$

Ainsi $$\boxed{f\notin\mathscr{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$$

2. On pose $$\forall t\in\mathbb{R}\qquad \varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t} & \text{si } t\neq 1\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

Par construction, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et on observe que
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad f(x,y)=e^x\varphi(y-x)$$
Par composition de fonctions continues, on conclut
$$\boxed{f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$$

Exercice 12 (**)

On pose $$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad f(x,y)=x^2+xy+y^2$$
Étudier si f admet une limite pour $\|(x,y)\|\to+\infty$.

Corrigé : Avec l'inégalité $xy\geqslant-\dfrac{x^2+y^2}{2}\iff(x+y)^2\geqslant 0$, on obtient
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad f(x,y)\geqslant\frac{x^2+y^2}{2}\xrightarrow[\|(x,y)\|_2\to+\infty]{}+\infty$$

Ainsi $$\boxed{f(x,y)\xrightarrow[\|(x,y)\|\to+\infty]{}+\infty}$$

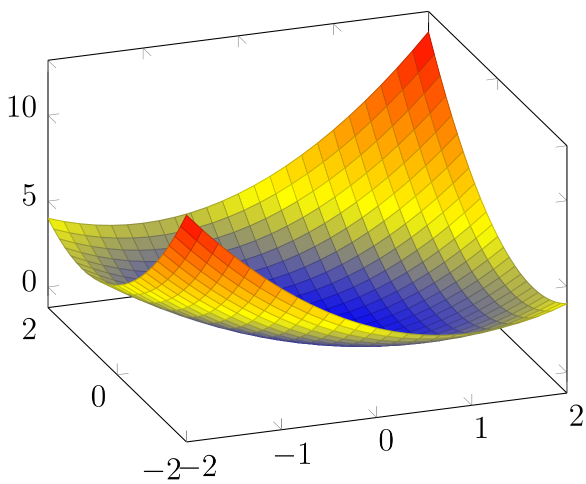

FIGURE 3 – Graphe de $z=f(x,y)$

Exercice 13 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0\,;1]\,,\mathbb{R})$.

1. Déterminer une norme sur E telle que le produit dans E soit continu.
2. Pour E muni de $\|\cdot\|_1$, le produit est-il continu ?

Corrigé : Le produit $\mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}, (f,g) \mapsto fg$ est une application bilinéaire sur E^2 à valeurs dans E. Ainsi, le produit dans E est continu si et seulement s'il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ telle que

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|fg\| \leqslant \mathrm{C}\|f\|\|g\|$$

1. Munissons E de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\forall t \in [0\,;1] \qquad |(fg)(t)| = |f(t)|\,|g(t)| \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

d'où
$$\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

Par conséquent $\boxed{\text{Dans E muni de } \|\cdot\|_\infty\text{, le produit est continue.}}$

2. Pour n entier, on pose $f_n : t \mapsto t^n$. On a

$$\frac{\|f_n^2\|_1}{\|f_n\|_1^2} = \frac{(n+1)^2}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit l'existence d'une constante $\mathrm{C} \geqslant 0$ vérifiant pour tout $(f,g) \in \mathrm{E}^2$

$$\|fg\|_1 \leqslant \mathrm{C}\|f\|_1 \|g\|_1$$

Ainsi $\boxed{\text{Le produit n'est pas continu dans } (\mathrm{E}, \|\cdot\|_1).}$

Remarque : L'ensemble $(\mathrm{E}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre. Le produit $\times$ est bilinéaire sur E^2 mais comme l'algèbre E n'est pas de dimension finie, la continuité n'est pas garantie et il n'y a donc pas de contradiction.

Exercice 14 (**)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ pour qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{M}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{A}$.

Corrigé : Supposons qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{M}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{A}$. Alors, par continuité du produit matriciel, il vient

$$\mathrm{M}^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}^{2n} = \mathrm{M}^n\mathrm{M}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{A}^2$$

Par unicité de la limite, on en déduit $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$, autrement dit A est la matrice d'un projecteur. Réciproquement, si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$, la suite $(\mathrm{A}^n)_n$ est stationnaire en A d'où

$\boxed{\text{Une condition nécessaire et suffisante au problème est que A soit la matrice d'un projecteur.}}$

Exercice 15 (**)

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un fermé d'intérieur vide.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application det continue car polynomiale. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{M} - \dfrac{1}{p}\mathrm{I}_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{M}$ et comme χ_{M} admet un nombre fini de racines, on a $\chi_{\mathrm{M}}\left(\dfrac{1}{p}\right) \neq 0$ pour p suffisamment grand ce qui signifie exactement que $\mathrm{M} - \dfrac{1}{p}\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

2. L'indice de nilpotence est majoré par n. Notant $\varphi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^n$ continue par continuité du produit matriciel, on a $\mathscr{N} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{N}$, on a par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathrm{B}(\mathrm{A}, \varepsilon) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \varnothing$$

Il en résulte qu'aucune boule ouverte n'est incluse dans $\mathscr{N}$ puisque les matrices nilpotentes sont non inversibles. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{N} \text{ est un fermé d'intérieur vide.}}$$

Variante : On note $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'égalité

$$\mathrm{E} \smallsetminus \mathring{\mathscr{N}} = \overline{\mathrm{E} \smallsetminus \mathscr{N}}$$

Or, une matrice inversible n'est pas nilpotente, autrement dit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{E} \smallsetminus \mathscr{N}$ d'où

$$\mathrm{E} = \overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})} \subset \overline{\mathrm{E} \smallsetminus \mathscr{N}}$$

On en déduit $\mathrm{E} = \mathrm{E} \smallsetminus \mathring{\mathscr{N}}$ et par suite $\mathring{\mathscr{N}} = \varnothing$.