ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Feuille d'exercices n°29

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall \mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{P}\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

Étudier la continuité des applications définies par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \quad \text{et} \quad \psi(\mathrm{P}) = \mathrm{AP} \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathrm{E}$$

**Corrigé :** Les deux applications considérées sont clairement linéaires. On a

$$\|\varphi(\mathrm{X}^n)\| = \|(\mathrm{X}+1)^n\| = \|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{X}^k\| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Si $\varphi$ est continue, il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|\varphi(\mathrm{X}^n)\| = 2^n \leqslant \mathrm{C}\|\mathrm{X}^n\| = \mathrm{C}$$

ce qui est absurde. Notons $\mathrm{A} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{X}^n$. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{AP} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} \alpha_p a_q \right) \mathrm{X}^n$$

d'où $$\|\mathrm{AP}\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \sum_{p+q=n} \alpha_p a_q \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} |\alpha_p a_q| = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \right)$$

c'est-à-dire exactement $$\|\psi(\mathrm{P})\| = \|\mathrm{AP}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{P}\|$$

On conclut $$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ n'est pas continue mais l'application } \psi \text{ l'est.}}$$

## Exercice 2 (**)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev normés et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des ouverts de F. Montrer

$$f \text{ continue} \iff \forall \mathrm{U} \in \mathscr{T} \qquad f^{-1}(\mathrm{U}) \text{ ouvert de E}$$

**Corrigé :** Supposons $f$ continue. Soit U ouvert de F et $x_0 \in f^{-1}(\mathrm{U})$. Comme $f(x_0) \in \mathrm{U}$, on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon) \subset \mathrm{U}$. Par continuité de $f$ en $x_0$, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x - x_0\| < \eta \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon}_{f(x) \in \mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon) \subset \mathrm{U}}$$

d'où $\mathrm{B}(x_0, \eta) \subset f^{-1}(\mathrm{U})$ ce qui prouve que $f^{-1}(\mathrm{U})$ ouvert. Réciproquement, soit $x_0 \in \mathrm{E}$ et $\varepsilon > 0$. L'ensemble $f^{-1}(\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon))$ est un ouvert contenant $x_0$. Ainsi, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\mathrm{B}(x_0, \eta) \subset f^{-1}(\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon))$$

ce qui signifie exactement

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x - x_0\| < \eta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

On conclut $$\boxed{f \text{ continue} \iff \forall \mathrm{U} \in \mathscr{T} \qquad f^{-1}(\mathrm{U}) \text{ ouvert de E}}$$

## Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$.

1. Montrer $$\mathrm{A} \text{ fermé} \iff \partial \mathrm{A} \subset \mathrm{A}$$

2. Montrer $$\mathrm{A} \text{ ouvert} \iff \mathrm{A} \cap \partial \mathrm{A} = \varnothing$$

**Corrigé :** 1. On a $\partial \mathrm{A} = \bar{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}$. Si A est fermé, alors $\mathrm{A} = \bar{\mathrm{A}}$ et le sens direct est immédiat. On a $\mathrm{A} \cup \partial \mathrm{A} = \bar{\mathrm{A}}$. En effet, soit $x \in \bar{\mathrm{A}}$. Si $x \in \mathring{\mathrm{A}}$, alors $x \in \mathrm{A}$ d'où $x \in \mathrm{A} \cup \partial \mathrm{A}$. Si $x \notin \mathring{\mathrm{A}}$, alors $x \in \partial \mathrm{A}$ d'où $x \in \mathrm{A} \cup \partial \mathrm{A}$ ce qui prouve $\bar{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A} \cup \partial \mathrm{A}$ et l'autre inclusion est immédiate. Par conséquent, si $\partial \mathrm{A} \subset \mathrm{A}$, alors $\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \cup \partial \mathrm{A} = \mathrm{A}$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{A} \text{ fermé} \iff \partial \mathrm{A} \subset \mathrm{A}}$$

2. On a $$\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \text{ fermé} \iff \partial(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}) \subset \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$$

Or, on sait que $\partial \mathrm{A} = \partial(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A})$ d'où

$$\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \text{ fermé} \iff \partial \mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \varnothing$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{A} \text{ ouvert} \iff \mathrm{A} \cap \partial \mathrm{A} = \varnothing}$$

## Exercice 4 (**)

Soit A partie non vide de E. Comparer $\mathrm{d}(\cdot, \mathrm{A})$ et $\mathrm{d}(\cdot, \bar{\mathrm{A}})$.

**Corrigé :** On a $\mathrm{A} \subset \bar{\mathrm{A}}$ d'où $\mathrm{d}(\cdot, \bar{\mathrm{A}}) \leqslant \mathrm{d}(\cdot, \mathrm{A})$. Soit $x \in \mathrm{A}$ et $a \in \bar{\mathrm{A}}$. Il existe une suite $(a_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{d}(x, \mathrm{A}) \leqslant \|x - a_n\|$$

Par continuité de la norme, passant à la limite, on obtient $\mathrm{d}(x, \mathrm{A}) \leqslant \|x - a\|$ pour tout $a \in \bar{\mathrm{A}}$. Passant à la borne inférieure pour $a \in \bar{\mathrm{A}}$, il vient $\mathrm{d}(x, \mathrm{A}) \leqslant \mathrm{d}(x, \bar{\mathrm{A}})$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{d}(\cdot, \mathrm{A}) = \mathrm{d}(\cdot, \bar{\mathrm{A}})}$$

## Exercice 5 (**)

L'application définie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ par $\mathrm{M} \mapsto \pi_{\mathrm{M}}$ est-elle continue ?

**Corrigé :** On suppose $n \geqslant 2$. L'application est définie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ puis $\deg \pi_{\mathrm{M}} \leqslant \deg \chi_{\mathrm{M}} = n$ pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. L'espace d'arrivée est donc de dimension finie et le choix de la norme n'importe pas. Considérons $\mathrm{M}_p = \dfrac{1}{p}\mathrm{E}_{1,n}$ pour $p$ entier non nul. On a $\mathrm{M}_p^2 = 0$ et $\mathrm{M}_p \neq 0$ d'où $\pi_{\mathrm{M}_p} = \mathrm{X}^2$ et $\mathrm{M}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ avec $\pi_0 = \mathrm{X}$. Ainsi, on a

$$\pi_{\mathrm{M}_p} = \mathrm{X}^2 \underset{p\to+\infty}{\not\longrightarrow} \mathrm{X} = \pi_0$$

On conclut $$\boxed{\text{L'application } \mathrm{M} \mapsto \pi_{\mathrm{M}} \text{ n'est pas continue.}}$$

**Remarque :** Pour $n = 1$, on a $\mathrm{M} = (m)$ et $\mathrm{M} \mapsto \pi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X} - m$ est effectivement continue (mais ce cas des matrices scalaires n'est pas très intéressant).

## Exercice 6 (**)

Déterminer l'intérieur d'une sphère.

**Corrigé :** Soit E un $\mathbb{K}$-evn, $a \in \mathrm{E}$ et $r \geqslant 0$. Si $r = 0$, alors $\mathrm{S}(a, r) = \{a\}$ est d'intérieur vide. Supposons $r > 0$. Soit $x \in \mathrm{S}(a, r)^\circ$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset \mathrm{S}(a, r)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a)$$

On a $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ d'où $x_n \in \mathrm{B}(x, \varepsilon)$ pour $n$ assez grand et $\|x_n - a\| < \|x - a\| = r$ ce qui prouve que $x_n \notin \mathrm{S}(a, r)$. On conclut

$$\boxed{\text{L'intérieur d'une sphère est vide.}}$$

## Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A une partie convexe de E. Montrer que $\bar{\mathrm{A}}$ et $\mathring{\mathrm{A}}$ sont convexes.

**Corrigé :**

Soit $(a, b) \in \mathring{\mathrm{A}}^2$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, r) \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{B}(b, r) \subset \mathrm{A}$ (on choisit le minimum des rayons pour chaque boule). Soit $\lambda \in [\,0\,;1\,]$ et $x \in \mathrm{B}(\lambda a + (1 - \lambda)b, r)$. On pose $u = x - \lambda a - (1 - \lambda)b$. On a donc $\|u\| < r$. Puis

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b + u = \lambda(a + u) + (1 - \lambda)(b + u)$$

avec

$$a + u \in \mathrm{B}(a, r) \quad \text{et} \quad b + u \in \mathrm{B}(b, r)$$

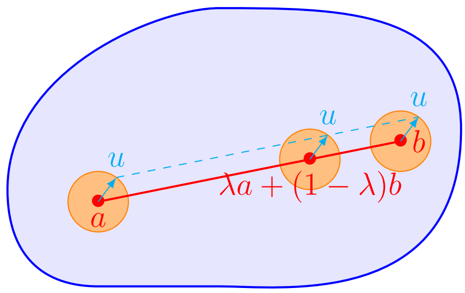


FIGURE 1 – Intérieur d'une partie convexe

On a donc $a + u \in \mathrm{A}$ et $b + u \in \mathrm{A}$ d'où $x \in \mathrm{A}$ par convexité. Ceci prouve que $\mathrm{B}(\lambda a + (1 - \lambda)b, r) \subset \mathrm{A}$.
Soit $(a, b) \in \bar{\mathrm{A}}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Il existe $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ à valeurs dans A telles que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Par suite

$$\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda a + (1 - \lambda)b \in \bar{\mathrm{A}}$$

On conclut $\boxed{\text{Pour A convexe, les parties } \bar{\mathrm{A}} \text{ et } \mathring{\mathrm{A}} \text{ sont également convexes.}}$

## Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn.

1. Soit $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$. Montrer $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{B}(a, r)) = \mathrm{E}$.
2. Montrer que tout sev strict de E est d'intérieur vide.

**Corrigé :** 1. Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{B}(a, r))$. Pour $u \in \mathrm{B}(0, r)$, on a $u + a \in \mathrm{B}(a, r)$ d'où

$$u = (u + a) - a \in \mathrm{F}$$

autrement dit $\mathrm{B}(0, r) \subset \mathrm{F}$. Soit $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$. On a

$$x = \frac{2\|x\|}{r} \underbrace{\frac{r}{2\|x\|}x}_{\in \mathrm{B}(0,r)} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{B}(0,r)) \subset \mathrm{F}$$

ce qui prouve $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{B}(a,r)) = \mathrm{E}}$

2. Soit $\mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}$. Si $\mathring{\mathrm{F}} \neq \varnothing$, alors il existe $a \in \mathrm{F}$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{F}$ d'où $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{B}(a,r)) \subset \mathrm{F}$ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Tout sev strict de E est d'intérieur vide.}}$$

## Exercice 9 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé, $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$. Montrer $\overline{\mathrm{B}(a,r)} = \mathrm{B}_f(a,r)$.

**Corrigé :** On a $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{B}_f(a,r)$ d'où $\overline{\mathrm{B}(a,r)} \subset \mathrm{B}_f(a,r)$ par fermeture d'une boule fermée. Soit $x \in \mathrm{B}_f(a,r)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x-a)$$

On a clairement $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $\|x_n - a\| < \|x-a\|$ d'où $\|x_n - a\| < r$ pour $n \geqslant 1$ ce qui prouve que la suite est à valeurs dans $\mathrm{B}(a,r)$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on a $\mathrm{B}_f(a,r) \subset \overline{\mathrm{B}(a,r)}$ et on conclut

$$\boxed{\overline{\mathrm{B}(a,r)} = \mathrm{B}_f(a,r)}$$

## Exercice 10 (**)

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer $\qquad \forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$
3. Montrer $\qquad \forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{Com}(\mathrm{AB}) = (\mathrm{Com}\,\mathrm{A})\,(\mathrm{Com}\,\mathrm{B})$

**Corrigé :** 1. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{M} - \dfrac{1}{p}\mathrm{I}_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{M}$ et comme $\chi_{\mathrm{M}}$ admet un nombre fini de racines, on a $\chi_{\mathrm{M}}\left(\dfrac{1}{p}\right) \neq 0$ pour $p$ suffisamment grand ce qui signifie exactement que $\mathrm{M} - \dfrac{1}{p}\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

2. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{AB}} &= \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B}) \\ &= \det(\mathrm{XA}^{-1} - \mathrm{B})\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{BA}) = \chi_{\mathrm{BA}}\end{aligned}$$

Or l'application $\mathrm{M} \mapsto \chi_{\mathrm{M}}$ est continue. En effet, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \chi_{\mathrm{M}} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}\delta_{i,\sigma(i)} - m_{i,\sigma(i)}\right)$$

donc les coefficients de $\chi_{\mathrm{M}}$ sont polynomiaux en les coefficients de M. Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et continuité de $\mathrm{A} \mapsto \chi_{\mathrm{AB}}$ et $\mathrm{A} \mapsto \chi_{\mathrm{BA}}$ (continuité des applications linéaires en dimension finie et de $\mathrm{M} \mapsto \chi_{\mathrm{M}}$), on conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \qquad \chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}}$$

3. On a $$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{Com}\,\mathrm{M} = (\det \mathrm{M}) \left(\mathrm{M}^\top\right)^{-1}$$

Par suite $$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2 \qquad \mathrm{Com}(\mathrm{AB}) = (\mathrm{Com}\,\mathrm{A})\,(\mathrm{Com}\,\mathrm{B})$$

Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui implique la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et continuité de $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Com}\,\mathrm{M}$ et du produit matriciel, on conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \qquad \mathrm{Com}(\mathrm{AB}) = (\mathrm{Com}\,\mathrm{A})\,(\mathrm{Com}\,\mathrm{B})}$$

## Exercice 11 (***)

Montrer qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

**Corrigé :** Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}, \mathrm{E})$. Si $\varphi$ est continue, alors $\mathrm{Ker}\ \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Supposons $\mathrm{Ker}\ \varphi$ fermé. Si $\mathrm{Ker}\ \varphi = \mathrm{E}$, alors $\varphi = 0$ et le résultat suit. Supposons $\varphi$ est discontinue. Pour tout $\mathrm{C} \geqslant 0$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $|\varphi(x)| > \mathrm{C}\|x\|$. On peut donc construire une suite $(x_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\varphi(x_n)| > n\|x_n\|$$

En particulier, on a $\varphi(x_n) \neq 0$ du fait de l'inégalité stricte ci-dessus. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_n = \frac{x_n}{\varphi(x_n)}$$

Pour $u \in \mathrm{E}$, on définit la suite

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = u - \varphi(u) y_n$$

La suite est à valeurs dans $\mathrm{Ker}\ \varphi$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$. Par fermeture, on obtient $u \in \mathrm{Ker}\ \varphi$ et ce pour tout $u \in \mathrm{E}$ ce qui prouve la nullité de $\varphi$ et contredit sa discontinuité. Ainsi

$$\boxed{\text{Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.}}$$

## Exercice 12 (***)

Soit $n$ entier non nul et $p \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!]$.

1. Montrer que $\mathrm{R}_p = \{\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg}\ \mathrm{A} \geqslant p\}$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\Gamma_p = \{\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg}\ \mathrm{A} = p\}$.

**Corrigé :** 1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{R}_p$. Il existe une matrice de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ extraite de A. Notons $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ les plages d'indices de cette extraction et on pose

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ \mathrm{M} = \left(m_{i,j}\right) \mapsto \det\left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}} \end{cases}$$

L'ensemble $\mathrm{U} = \Phi^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. On a clairement $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$ et $\mathrm{U} \subset \mathrm{R}_p$ puisque pour une matrice de U, l'extraction sur les indices $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ fournit une matrice de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Ainsi, l'ensemble U est un voisinage ouvert de A inclus dans $\mathrm{R}_p$ ce qui prouve que

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{R}_p \text{ est un ouvert de } \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).}$$

2. Pour $p = n$, on sait que $\Gamma_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense. Il est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application det et il est dense car, pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{M} + \frac{1}{k}\mathrm{I}_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{M}$$

et $\det(\mathrm{M} + 1/k\mathrm{I}_n) = (-1)^n\chi_{\mathrm{M}}(-1/k)$ est non nul pour $k$ assez grand puisque $\chi_{\mathrm{M}}$ admet un nombre fini de racines. Puis, pour $p \in [\![ 0\,;\, n-1 ]\!]$, on a $\Gamma_p \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \smallsetminus \Gamma_n$ d'où

$$\mathring{\Gamma}_p \subset (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \smallsetminus \Gamma_n)^\circ = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \smallsetminus \overline{\Gamma_n} = \varnothing$$

Déterminons $\overline{\Gamma_p}$. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \smallsetminus \mathrm{R}_{p+1}$ et notons $r = \mathrm{rg}\ \mathrm{M} \leqslant p$. On dispose de $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $\mathrm{M} = \mathrm{P}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}$. Posons

$$\forall k \geqslant 1 \qquad \mathrm{M}_k = \mathrm{P}\left(\mathrm{J}_r + \frac{1}{k}(\mathrm{J}_p - \mathrm{J}_r)\right)\mathrm{Q}$$

Ainsi $$\forall k \geqslant 1 \qquad \mathrm{rg}\ \mathrm{M}_k = p \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{M}$$

Tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \smallsetminus \mathrm{R}_{p+1}$ peut donc être vu comme limite d'une suite à valeurs dans $\Gamma_p$ ce qui prouve $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \smallsetminus \mathrm{R}_{p+1} \subset \overline{\Gamma_p}$. On a clairement $\Gamma_p \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \smallsetminus \mathrm{R}_{p+1}$ et l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \smallsetminus \mathrm{R}_{p+1}$ est fermé comme complémentaire d'un ouvert. Passant à l'adhérence, l'inclusion réciproque s'ensuit et on conclut

$$\boxed{\mathring{\Gamma}_n = \Gamma_n, \qquad \overline{\Gamma_n} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \forall p \in [\![ 0\,;\, n-1 ]\!] \qquad \mathring{\Gamma}_p = \varnothing, \qquad \overline{\Gamma_p} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \smallsetminus \mathrm{R}_{p+1}}$$

**Variante :** Pour $p \in [\![ 0\,;\, n-1 ]\!]$ et $\mathrm{M} \in \mathring{\Gamma}_p$, on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{M},\varepsilon) \subset \Gamma_p$ mais $\mathrm{B}(\mathrm{M},\varepsilon) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \varnothing$ ce qui contredit l'inclusion précédente et prouve donc la vacuité de $\mathring{\Gamma}_p$.

## Exercice 13 (***)

Montrer qu'une somme de fermés n'est pas nécessairement fermée.

**Corrigé :** Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\mathrm{F}_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathrm{F}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Notons $\varphi : (x,y) \mapsto y$ et $\psi : (x,y) \mapsto xy - 1$ polynomiales donc continues, on a

$$\mathrm{F}_1 = \varphi^{-1}(\{0\}) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_2 = \psi^{-1}(\{0\})$$

ce qui prouve leur fermeture. Puis, on a

$$\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 = \left\{\left(x + y, \frac{1}{y}\right), (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\right\}$$

L'inclusion $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est immédiate. Pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a

$$\left(x + y, \frac{1}{y}\right) = (a,b) \iff (x,y) = \left(a - \frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right)$$

ce qui prouve $$\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

C'est ensemble n'est pas fermé puisque la suite $\left(0, \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, convergente mais la limite n'est pas dans cet ensemble.

Dans $\mathbb{R}$, c'est possible mais plus délicat. On a $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ dense dans $\mathbb{R}$ (non trivial), distinct de $\mathbb{R}$ et somme de deux fermés. Ou aussi, en considérant

$$\mathrm{F}_1=\mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_2=\left\{-n+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans $\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2$ mais pas sa limite. On conclut

$$\boxed{\text{Une somme de fermés n'est pas nécessairement fermée.}}$$

## Exercice 14 (***)

Soient A et B deux fermés disjoints de E un $\mathbb{K}$-evn.

1. Trouver $f\in\mathscr{C}(\mathrm{E},\mathbb{R})$ tel que $f_{|\mathrm{A}}=0$ et $f_{|\mathrm{B}}=1$.
2. En déduire qu'il existe des ouverts U et V disjoints tels que $\mathrm{A}\subset\mathrm{U}$ et $\mathrm{B}\subset\mathrm{V}$.

**Corrigé :** 1. On pose $\qquad \forall x\in\mathrm{E} \qquad f(x)=\dfrac{\mathrm{d}(x,\mathrm{A})}{\mathrm{d}(x,\mathrm{A})+\mathrm{d}(x,\mathrm{B})}$

L'application est bien définie car

$$\mathrm{d}(x,\mathrm{A})+\mathrm{d}(x,\mathrm{B})=0 \iff x\in\bar{\mathrm{A}}=\mathrm{A} \quad \text{et} \quad x\in\bar{\mathrm{B}}=\mathrm{B}$$

ce qui est impossible puisque A et B sont disjoints. Il s'agit donc d'un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. On a clairement $f(x)=0$ pour $x\in\mathrm{A}$ et $f(x)=\dfrac{\mathrm{d}(x,\mathrm{A})}{\mathrm{d}(x,\mathrm{A})}=1$ pour $x\in\mathrm{B}$. On choisit donc

$$\boxed{\forall x\in\mathrm{E} \qquad f(x)=\frac{\mathrm{d}(x,\mathrm{A})}{\mathrm{d}(x,\mathrm{A})+\mathrm{d}(x,\mathrm{B})}}$$

2. On pose $\mathrm{U}=f^{-1}\left(\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[\right)$ et $\mathrm{V}=f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[\right)$. Les ensembles U et V sont ouverts comme images réciproques d'ouverts par une application continue. On a

$$\mathrm{A}\subset f^{-1}(\{0\})\subset f^{-1}(\left]-\infty\,;\tfrac{1}{2}\right[)=\mathrm{U} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}\subset f^{-1}(\{1\})\subset f^{-1}(\left]\tfrac{1}{2}\,;+\infty\right[)=\mathrm{V}$$

et $$\mathrm{U}\cap\mathrm{V}=f^{-1}\left(\left]-\infty\,;\tfrac{1}{2}\right[\cap\left]\tfrac{1}{2}\,;+\infty\right[\right)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{Il existe des ouverts disjoints U et V tels que } \mathrm{A}\subset\mathrm{U} \text{ et } \mathrm{B}\subset\mathrm{V}.}$

## Exercice 15 (***)

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres simples est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

**Corrigé :** 1. Soit $\mathrm{M}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On dispose de $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{T}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est triangulaire. Définissons la suite de matrices triangulaires $(\mathrm{T}_k)_k$ par

$$\forall k\geqslant 1 \qquad \mathrm{T}_k=\mathrm{T}+\frac{1}{k}\operatorname{diag}(1,\ldots,n)=\left(t_{i,j}^{(k)}\right)$$

Considérons les $i$-èmes et $j$-èmes termes diagonaux de $\mathrm{T}_k$ avec $i\neq j$. Si $t_{i,i}=t_{j,j}$, alors

$$t_{i,i}^{(k)}-t_{j,j}^{(k)}=t_{i,i}+\frac{i}{k}-t_{j,j}-\frac{j}{k}=\frac{i-j}{k}\neq 0$$

Si $t_{i,i} \neq t_{j,j}$, alors $\qquad t_{i,i}^{(k)} - t_{j,j}^{(k)} = t_{i,i} + \dfrac{i}{k} - t_{j,j} - \dfrac{j}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} t_{i,i} - t_{j,j} \neq 0$

Ainsi, comme il y a un nombre fini de couples $(i, j) \in [\![ 1\,; n ]\!]^2$ avec $i \neq j$, en choisissant $k$ suffisamment grand, on peut garantir que les termes diagonaux de la matrice triangulaire $\mathrm{T}_k$ sont deux à deux distincts ce qui, par conséquent, la rend diagonalisable.

On a clairement
$$\mathrm{PT}_k\mathrm{P}^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{PTP}^{-1} = \mathrm{M}$$

Par conséquent $\qquad \boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{D}_n^s(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$

2. L'application $\mathrm{M} \mapsto \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(\mathrm{M})\mathrm{M}^k$ est continue. En effet, les puissances $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^k$ sont continues (à coefficients polynomiaux en les coefficients de M) et les coefficients $\mathrm{M} \mapsto a_k(\mathrm{M})$ sont polynomiaux en les coefficients de M puisque

$$\chi_{\mathrm{M}} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}\delta_{i,\sigma(i)} - m_{i,\sigma(i)}\right)$$

Considérons $\mathrm{M} \in \mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé. Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_i)_{i \in [\![ 1\,; n ]\!]}$ une base de diagonalisation de $u$ et $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_i, i \in [\![ 1\,; n ]\!]\}$. On a

$$\forall i \in [\![ 1\,; n ]\!] \qquad \chi_u(u)(\varepsilon_i) = \left[\bigcirc_{k \in [\![ 1\,; n ]\!] \smallsetminus \{i\}} (u - \lambda_k \,\mathrm{id}\,)\right] \circ (u - \lambda_i \,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_i) = 0$$

Ainsi, l'endomorphisme $\chi_u(u)$ s'annule sur une base d'où

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{D}_n^s(\mathbb{C}) \qquad \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}) = 0$$

La fonction nulle et la fonction continue $\mathrm{M} \mapsto \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{M})$ coïncident sur l'ensemble dense $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ d'où

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}) = 0}$$