SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

B. Landelle

Table des matières

Soit A partie non vide de E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $(u_n)_n$ une suite de fonctions définies de A dans $\mathbb{K}$. Tous les résultats présentés ci-après s'étendent au cas de fonctions u_n à valeurs dans F un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie en remplaçant les valeurs absolues/modules par des normes. Pour certaines situations, la suite $(u_n)_n$ considérée sera une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Convergence simple et dominée

1 Convergence simple

Définition 1. *On dit que la suite de fonctions $(u_n)_n$* converge simplement *(sur A) vers u : $\mathrm{A} \to \mathbb{K}$ si*

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)$$

On dit que la suite de fonctions $(u_n)_n$ converge simplement *(sur A) s'il existe $u : \mathrm{A} \to \mathbb{K}$ telle que $(u_n)_n$ converge simplement vers u. On dit que u est la* limite simple *de la suite $(u_n)_n$.*

Remarque : Il y a unicité de la limite simple d'une suite de fonctions.

Notations : On note $\qquad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CS}} u \quad$ ou $\quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{S}} u$

Exemples : 1. Soit $(u_n)_n$ définie par $u_n(t) = t^n$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$ et n entier. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad u_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [\,0\,;1\,[\\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

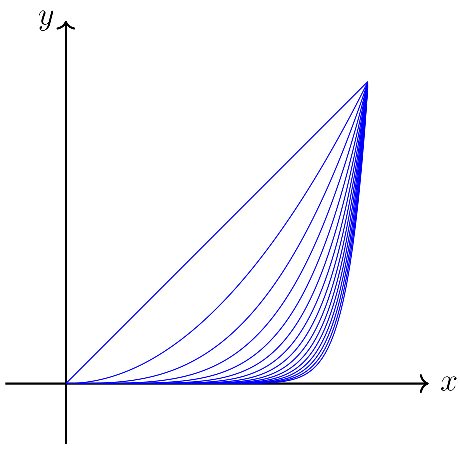


FIGURE 1 – Suite des graphes $y = u_n(x)$

On constate que la continuité n'est pas préservée par limite simple.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n(t) = \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n$ pour t réel et n entier non nul. Pour t réel, on a $1 + \dfrac{t}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ce qui justifie la positivité de $1 + \dfrac{t}{n}$ pour n assez grand et par suite, pour n assez grand

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)} = \mathrm{e}^{t+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^t$$

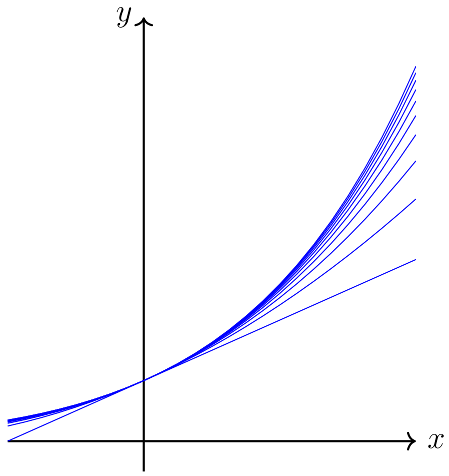


FIGURE 2 – Suite des graphes de $y = u_n(x)$

Définition 2. *Pour n entier, on pose* $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. *On appelle* série de fonctions *de terme général u_n la suite de fonctions $(\mathrm{S}_n)_n$ que l'on note $\sum u_n$. On dit que S_n est* la somme partielle d'indice n *(ou* d'ordre n*) de la série de fonctions $\sum u_n$.*

Remarque : Pour une suite de fonctions de terme général u_n définie à partir du rang n_0, on définit la série à partir du même rang et on la note $\sum_{n \geqslant n_0} u_n = (\mathrm{S}_n)_{n \geqslant n_0}$ avec $\mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Définition 3. *On dit que la série de fonctions $\sum u_n$* converge simplement *(sur* A*) si la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_n$ converge simplement (sur* A*) vers une fonction* S*. La fonction* S *est appelée* somme *de cette série de fonctions et notée* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 1. *La convergence simple de $\sum u_n$ équivaut à la convergence pour tout $x \in \mathrm{A}$ de $\sum u_n(x)$.*

Démonstration. Immédiate. □

Exemples : 1. La série de fonctions $\sum x^n$ (abus de notation) converge simplement sur $]-1\,;1[$ et on a

$$\forall x \in\,]-1\,;1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

2. La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1\,;+\infty[$ par critère de Riemann. On note

$$\forall x > 1 \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Définition 4. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions qui converge simplement de somme* S*. On appelle* reste d'ordre n *de $\sum u_n$ la fonction notée R_n définie par*

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{S}(x) - \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

Proposition 2. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions qui converge simplement. On a*

$$\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{S}} 0$$

Démonstration. Immédiate. □

2 Théorème de convergence dominée

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant :*

1. *les fonctions f_n sont continues par morceaux ;*
2. *la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux ;*
3. *Domination : il existe $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n| \leqslant \varphi$$

Alors, les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_{\mathrm{I}} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathrm{I}} f$$

[Admis]

Exemples : 1. Comportement asymptotique de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

On a

$$\forall t > 0 \qquad \frac{1}{(1+t^2)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

Par convergence dominée $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Remarque : On peut faire sans convergence dominée en transformant l'intégrale avec le changement $t = \tan u$ ou aussi avec l'inégalité $(1+t^2)^n \geqslant 1 + nt^2$ par exemple.

2. Comportement asymptotique de $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

L'intégrale se calcule explicitement mais il est intéressant d'expérimenter le théorème de convergence dominée sur cet exemple simple. On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]}(t)$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t}$$

Par inégalité de concavité, on a pour n entier non nul

$$\forall t\,[\,0\,;n\,[\qquad f_n(t) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

et l'inégalité vaut encore pour $t \geqslant n$. Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on conclut par convergence dominée

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Remarque : Sans l'hypothèse de domination, le résultat n'a pas lieu. En effet, considérons

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) = n^2 t^n (1-t)$$

On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puis

$$f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1} n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Si une domination était possible, une dominante continue par morceaux étant bornée sur $[\,0\,;1\,]$, on aurait $f_n(t)$ bornée pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,]$. Enfin, on constate

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = n^2\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

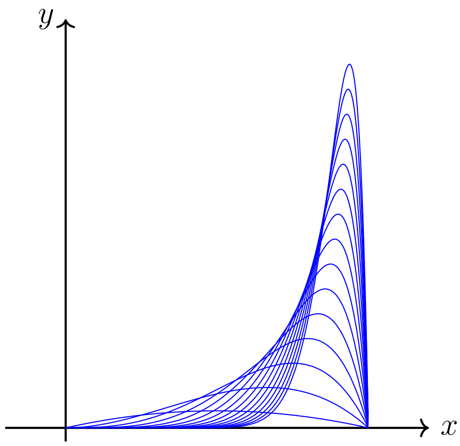


FIGURE 3 – Suite des graphes de $y = f_n(x)$

3 Théorème d'intégration terme à terme

Théorème 2. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant :*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$;
2. *la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux ;*
3. *Domination : la série $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n|$ converge.*

Alors, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et on a

$$\int_{\mathrm{I}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$$

[Admis]

Exemples : 1. On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

2. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(4n+1)(4n+3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{4n}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

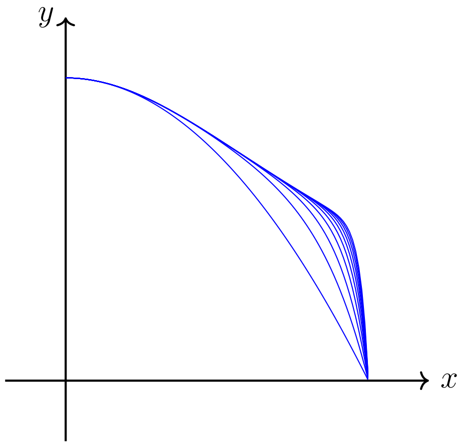


FIGURE 4 – Tracé de la suite des sommes partielles

II Convergence uniforme et suites de fonctions

1 Convergence uniforme

Définition 5. *On dit que la suite de fonctions* $(u_n)_n$ converge uniformément *(sur* A*) vers* $u : \mathrm{A} \to \mathbb{K}$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

On dit que la suite de fonctions $(u_n)_n$ converge uniformément *(sur* A*) s'il existe* $u : \mathrm{A} \to \mathbb{K}$ *telle que* $(u_n)_n$ *converge uniformément vers* u*. On dit que* u *est la* limite uniforme *de la suite* $(u_n)_n$.

Remarque : Il y a unicité de la limite uniforme d'une suite de fonctions.

Notations : On note $$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} u \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{U}} u$$

Théorème 3. *On a* $$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} u \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CS}} u$$

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 3. *Soit* $(u_n)_n \in \mathscr{B}(\mathrm{A}, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *et* $u \in \mathscr{B}(\mathrm{A}, \mathbb{K})$*. On a*

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} u \iff \|u_n - u\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Démonstration. La notation $\|u_n - u\|_\infty$ est licite puisque $u_n - u \in \mathscr{B}(\mathrm{A}, \mathbb{K})$ pour tout n entier. La convergence uniforme de $(u_n)_n$ vers u signifie

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |(u_n - u)(x)| \leqslant \varepsilon$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \|u_n - u\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

d'où le résultat annoncé. □

Proposition 4. *Soit $(u_n)_n \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $u \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathbb{K})$. On a $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur A si et seulement si $(u_n - u)_n$ est bornée à partir d'un certain rang et*

$$\|u_n - u\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Démonstration. La convergence uniforme de $(u_n)_n$ vers u signifie

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |(u_n - u)(x)| \leqslant \varepsilon$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad u_n - u \text{ bornée et } \|u_n - u\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

d'où le résultat annoncé. □

Exemples : 1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n(t) = \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n}}$ pour t réel et n entier non nul. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad u_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(t) = |t|$$

Puis, en multipliant par la quantité conjuguée, pour n entier non nul

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad u_n(t) - u(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{t^2} = \frac{1/n}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{t^2}} \quad \Longrightarrow \quad \|u_n - u\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

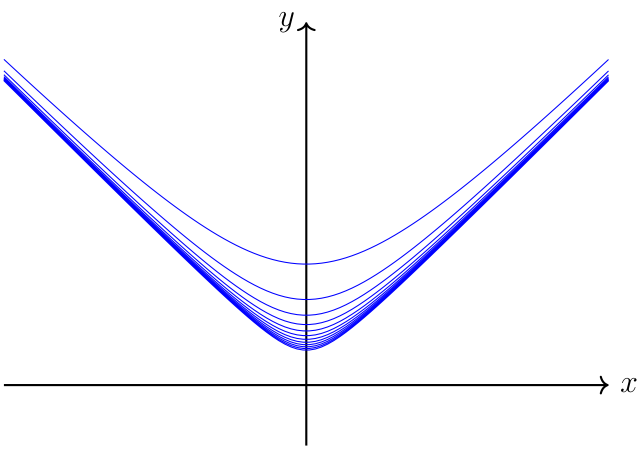


FIGURE 5 – Suite des graphes de $y = u_n(x)$

2. Avec $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n(t) = \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n$ pour t réel et n entier non nul, on a

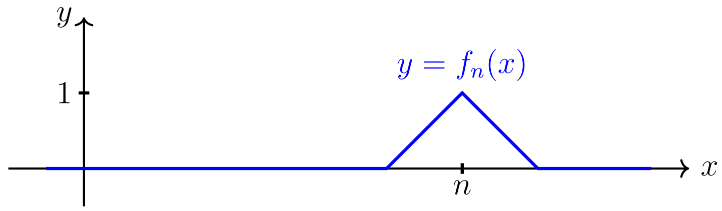
$$\mathrm{e}^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit $(u_n - u)_{n\geqslant 1}$ bornée à partir d'un certain rang. On peut aussi écrire

$$\mathrm{e}^n - u_n(n) = \mathrm{e}^n - 2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Si $(u_n)_n$ convergeait uniformément, on aurait $\|u_n - u\|_\infty = \mathrm{o}(1)$ d'où la contradiction.

3. Soit $(u_n)_n$ définie par : pour n entier, la fonction u_n est affine sur $[\, n-1\,;n\,]$ et sur $[\, n\,;n+1\,]$ avec $u_n(n) = 1$ et $u_n(t) = 0$ pour $|t - n| > 1$.



On a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} 0$, $(u_n - u)_{n\geqslant 1}$ toujours bornée mais $u_n(n) - u(n) = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Remarques : En pratique, pour montrer une convergence uniforme, on peut chercher à calculer $\|u_n - u\|_\infty$ ou majorer cette quantité par une suite de limite nulle. Pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme, on peut regarder le caractère borné de $u_n - u$ ou étudier le comportement asymptotique de $u_n(t_n) - u(t_n)$ avec $(t_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$.

2 Continuité, double limite

Théorème 4. *Si les u_n sont continues en $a \in \mathrm{A}$ et si $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur un voisinage de a relatif de A, alors u est continue en a.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathrm{A}$ et n entier, on a

$$|u(x) - u(a)| \leqslant |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(a)| + |u_n(a) - u(a)|$$

En choisissant $x \in \mathscr{V}$ avec $\mathscr{V}$ un voisinage de a relatif de A tel qu'il y a convergence uniforme de $(u_n)_n$ sur $\mathscr{V}$, on a pour n assez grand

$$|u(x) - u(a)| \leqslant 2\varepsilon + |u_n(x) - u_n(a)|$$

Et pour ce choix de n, on a par continuité de u_n en a l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{V} \qquad \|x - a\| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |u(x) - u(a)| \leqslant 3\varepsilon$$

□

Corollaire 1. *Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.*

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème précédent. □

Exemple : Soit $(u_n)_n$ définie par $u_n(t) = t^n$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$. On a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} u$ avec $u = \mathbb{1}_{\{1\}}$. Si la convergence était uniforme, on aurait par théorème $u \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ ce qui n'est pas le cas. On conclut que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{CU}}{\not\longrightarrow}} u$$

Corollaire 2. *Soit $(u_n)_n$ suite de fonctions continues sur un intervalle I. Si la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur tout segment de I, alors u est continue sur I.*

Démonstration. On applique le corollaire précédent à tout segment de I. □

Exemples : 1. Soit $(u_n)_n$ définie par $u_n(t) = \dfrac{t^n}{1+t^n}$ pour $t \geqslant 0$. On a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad u_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(t) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{1\}}(t) + \mathbb{1}_{]\,1\,;+\infty\,[}(t)$$

On n'a pas convergence uniforme de $(u_n)_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ sans quoi on aurait continuité en 1 ce qui n'a pas lieu.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n(t) = \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n$ pour t réel et n entier non nul. On sait $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $u = \exp$. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R}_+$ et n entier non nul. On a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad |u_n(t) - u(t)| = \mathrm{e}^t - \left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^t\left[1 - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)-t}\right]$$

On pose
$$\forall t \geqslant 0 \qquad f_n(t) = n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - t$$

On a $f_n \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et par dérivation

$$\forall t \geqslant 0 \qquad f_n'(t) = \frac{-t}{n+t} \leqslant 0$$

On en déduit la croissance $|u_n - u|$ (produit de fonctions croissantes et positives) et par suite

$$\|u_n - u\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} = |u_n(b) - u(b)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

Théorème 5 (Théorème de la double limite). *Soit une suite de fonctions $(u_n)_n$ qui converge uniformément vers u sur A et $a \in \bar{\mathrm{A}}$ ou a éventuellement infini si A partie non bornée de $\mathbb{R}$. Si pour tout n, la fonction u_n admet une limite finie ℓ_n en a, alors $(\ell_n)_n$ admet une limite finie ℓ et*

$$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

autrement dit
$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} u_n(x)$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe N entier tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

d'où par inégalité triangulaire

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |u_n(x) - u_{\mathrm{N}}(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi, pour $n \geqslant \mathrm{N}$

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad |\ell_n| \leqslant |\ell_n - u_n(x)| + |u_n(x) - u_{\mathrm{N}}(x)| + |u_{\mathrm{N}}(x)|$$

Faisant tendre $x \to a$, on obtient

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad |\ell_n| \leqslant 2\varepsilon + |\ell_{\mathrm{N}}|$$

ce qui prouve que la suite $(\ell_n)_n$ est bornée. Cette suite étant à valeurs dans un espace de dimension finie, elle admet une valeur d'adhérence qu'on note ℓ. Notons φ une extractrice telle que $\ell_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |u(x) - \ell| \leqslant \left|u(x) - u_{\varphi(n)}(x)\right| + \left|u_{\varphi(n)}(x) - \ell_{\varphi(n)}\right| + \left|\ell_{\varphi(n)} - \ell\right|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit n entier tel que

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad \left|u(x) - u_{\varphi(n)}(x)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\ell_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Enfin, il existe $\mathscr{V}$ voisinage de a tel que

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad x \in \mathscr{V} \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)}(x) - \ell_{\varphi(n)}\right| \leqslant \varepsilon$$

D'où $$\forall x \in \mathrm{A} \qquad x \in \mathscr{V} \quad \Longrightarrow \quad |u(x) - \ell| \leqslant 3\varepsilon$$

c'est-à-dire $$u(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

Ceci prouve également l'unicité de ℓ en tant que valeur d'adhérence de $(\ell_n)_n$. Comme la suite est à bornée dans un espace de dimension finie, il s'ensuit $\ell_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$. □

Exemple : Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La fonction f n'est pas limite uniforme de fonctions polynomiales sur $]\,0\,;1\,]$. Supposons qu'il existe $(\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ telle que

$$\|\mathrm{P}_n - f\|_{\infty,]\,0\,;1\,]} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

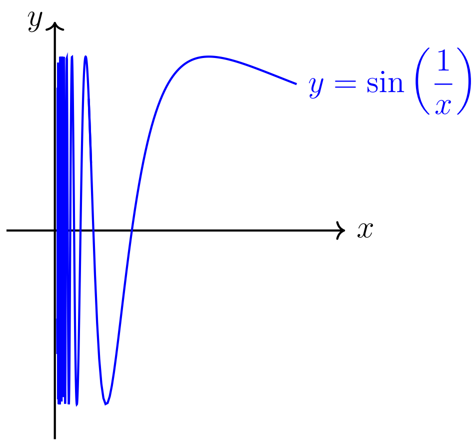
Les fonctions polynomiales définies sur $]\,0\,;1\,]$ sont clairement prolongeables par continuité en 0 d'où

$$\mathrm{P}_n(t) \xrightarrow[t \to 0]{} \ell_n$$

D'après le théorème de la double limite, il existe ℓ réel tel que $\ell_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$ et

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} \ell$$

ce qui est absurde puisque f n'a pas de limite en zéro. On en déduit que f ne peut être limite uniforme de fonctions polynomiales.



3 Intégration

Théorème 6. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$. On suppose que $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction u sur tout segment de I. On pose*

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{I} \qquad \mathrm{U}_n(x) = \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{U}(x) = \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors, la suite $(\mathrm{U}_n)_n$ converge uniformément vers U sur tout segment de I.

Démonstration. Soit J segment inclus dans I et K un segment inclus dans I contenant J et a ($\mathrm{K} = [\,\min \mathrm{J} \cup \{a\}\,; \max \mathrm{J} \cup \{a\}\,]$ par exemple). On a

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{J}} |\mathrm{U}_n(x) - \mathrm{U}(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{K}} \left|\int_a^x (u_n(t) - u(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{K}} |x - a|\,\|u_n - u\|_{\infty,\mathrm{K}}$$

Le résultat suit. □

Corollaire 3. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur le segment $[\,a\,;b\,]$. On suppose que $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction u sur $[\,a\,;b\,]$. Alors*

$$\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. On applique le résultat précédent avec $\mathrm{I} = [\,a\,;b\,]$ et la convergence uniforme entraine la convergence simple d'où $\mathrm{U}_n(b) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{U}(b)$. □

Remarque : Le résultat est faux avec juste de la convergence simple. Posons

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times[\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) = n^2 t^n (1-t)$$

On a
$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puis
$$f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1} n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

et enfin
$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = n^2\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

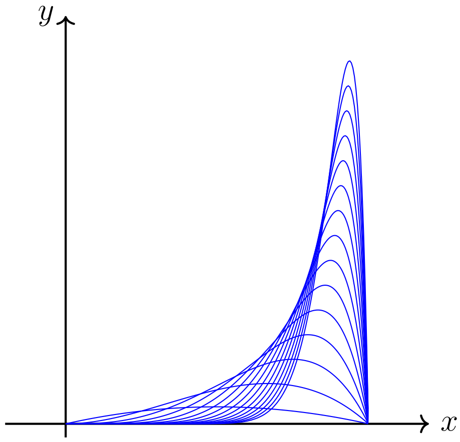


FIGURE 6 – Suite des graphes de $y = f_n(x)$

Exemples : 1. Pour a, b réels, on a

$$\int_a^b \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b |t|\,\mathrm{d}t$$

On pourrait aussi faire par convergence dominée avec la domination

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^*\times[\,a\,;b\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{t^2+\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt{t^2+1}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k-lipschitzienne. Pour a, b réels, on a

$$\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Par convergence dominée, on utiliserait

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^*\times[\,a\,;b\,] \qquad 0 \leqslant \left|f\left(x+\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \|f\|_{\infty,[\,a\,;b+1\,]}$$

4 Dérivation

Théorème 7. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Si $(u_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction u et si $(u'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonctions v, alors $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur tout segment de I, la fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$, i.e.*

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} u'_n$$

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{I}$. D'après le théorème fondamental d'analyse

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad u_n(x) - u_n(a) = \int_a^x u'_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que $(u_n - u_n(a))_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $x \mapsto \displaystyle\int_a^x v(t)\mathrm{d}t$ avec v continue comme limite uniforme sur tout segment de la suite de fonctions continues $(u'_n)_n$ Or, on a $u_n - u_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CS}} u - u(a)$ d'où, par unicité de la limite simple

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad u(x) = u(a) + \int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t$$

et par conséquent u de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u' = v$. Enfin, on a

$$|u_n(x) - u(x)| \leqslant |u_n(x) - u_n(a) - (u(x) - u(a))| + |u_n(a) - u(a)|$$

La convergence uniforme de $(u_n)_n$ vers u sur tout segment de I s'en déduit. □

Théorème 8. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I avec k entier non nul. Si pour tout $j \in [\![0\,;\, k-1]\!]$, la suite $(u_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I et si $(u_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I, alors, notant u la limite simple de $(u_n)_n$, on a u de classe $\mathscr{C}^k$ et $(u_n^{(j)})_n$ converge uniformément vers $u^{(j)}$ sur tout segment de I pour tout $j \in [\![0\,;\, k]\!]$ avec*

$$\forall j \in [\![0\,;\, k]\!] \qquad u^{(j)} = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)^{(j)} = \lim_{n\to+\infty} u_n^{(j)}$$

Démonstration. On procède par récurrence. Le cas $k = 1$ est le théorème précédent. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $k-1$. On pose $v_n = u'_n$ pour tout n entier. La suite $(v_n)_n$ vérifie exactement les hypothèses du théorème à l'ordre $k-1$ d'où la converge uniforme pour tout $j \in [\![0\,;\, k-1]\!]$ de $(v_n^{(j)})_n = (u_n^{(j+1)})_n$ sur tout segment de I avec $v = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ et

$$\forall j \in [\![0\,;\, k-1]\!] \qquad \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right)^{(j)} = \lim_{n\to+\infty} v_n^{(j)}$$

On applique alors le théorème de dérivation à la suite $(u_n)_n$. Il s'ensuit que $(u_n)_n$ converge uniformément sur tout segment vers u de classe $\mathscr{C}^1$ et $u' = v$ d'où u de classe $\mathscr{C}^k$ et

$$\forall j \in [\![0\,;\, k-1]\!] \qquad u^{(j+1)} = v^{(j)} = \lim_{n\to+\infty} v_n^{(j)} = \lim_{n\to+\infty} u_n^{(j+1)}$$

d'où le résultat. □

Remarque : C'est surtout la déclinaison de ces résultats pour les séries de fonctions qui est utile en pratique.

III Convergence uniforme, normale et séries de fonctions

1 Convergence uniforme

Définition 6. *Soit* $\sum u_n$ *une série de fonctions. On dit que* $\sum u_n$ converge uniformément *(sur* A*) si la suite des sommes partielles* $(\mathrm{S}_n)_n$ *converge uniformément (sur* A*).*

Théorème 9. *Soit* $\sum u_n$ *une série de fonctions. On a*

$$\sum u_n \text{ converge uniformément} \iff \sum u_n \text{ converge simplement et } \mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} 0$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\sum u_n \text{ CU} &\iff \exists \mathrm{S} : \mathrm{A} \to \mathbb{K} \quad | \quad \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} \mathrm{S} \\ &\iff \exists \mathrm{S} : \mathrm{A} \to \mathbb{K} \quad | \quad \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CS}} \mathrm{S} \quad \text{et} \quad \mathrm{S} - \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} 0\end{aligned}$$

□

Exemples : 1. La série $\sum \dfrac{1}{(n+x)^2}$ converge uniformément sur $]\,0\,;+\infty\,[$. En effet, on a

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \mathrm{o}(1)$$

On a exhibé un majorant indépendant de x de limite nulle. Le résultat suit.

2. On s'intéresse au mode de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Par comparaison série/intégrale, on a

$$\forall x > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \mathrm{R}_n(x) \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{(x-1)(n+1)^{x-1}}$$

Comme $x \mapsto \displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ n'est pas bornée sur $]\,1\,;+\infty\,[$, on en déduit que $x \mapsto \mathrm{R}_n(x)$ n'est pas bornée à partir d'un certain rang et par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]\,1\,;+\infty\,[$. On peut aussi étudier une troncature du reste : pour n entier et $x > 1$

$$\mathrm{R}_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x} \geqslant \frac{n}{(2n)^x}$$

La fonction R_n décroît donc admet une limite en 1 (par limite monotone) d'où $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{R}_n(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ ce qui contredit la convergence uniforme du reste vers zéro.

Application importante : Si $\sum u_n$ est telle que $\sum u_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées pour tout $x \in \mathrm{A}$ avec $\|u_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors la série $\sum u_n$ converge uniformément. En effet, d'après le théorème sur le reste de séries alternées, on a

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \|u_{n+1}\|_\infty$$

Le résultat suit.

Exemple : La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément sur $]\,0\,;+\infty\,[$. En effet, on a

$$\forall x > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

d'où le résultat.

Quelques stratégies pour nier la convergence uniforme :
On considère l'exemple $\sum u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2x+1}$ pour $x > 0$ et n entier. La série de fonctions converge simplement sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Supposons la convergence uniforme.
• Terme général à partir du reste : on a $\|u_n\|_\infty = 1$ et $u_n = \mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n$ d'où

$$\|u_n\|_\infty \leqslant \|\mathrm{R}_n\|_\infty + \|\mathrm{R}_{n-1}\|_\infty = \mathrm{o}(1)$$

• Troncature du reste : on a $\mathrm{R}_n(x) \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k^2x+1} \geqslant \dfrac{n}{(2n)^2x+1}$ d'où $\mathrm{R}_n\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
• Comparaison série/intégrale pour le reste : On a

$$\mathrm{R}_n(x) \geqslant \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,((n+1)\sqrt{x})\right]$$

d'où

$$\mathrm{R}_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

Pour chacune de ces situations, on conclut que le reste ne converge pas uniformément vers zéro et donc que la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2 Convergence normale

Définition 7. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum u_n$* converge normalement *si la $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.*

Théorème 10. *La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence uniforme et sa convergence absolue en tout point.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{A}$. On a $|u_n(x)| \leqslant \|u_n\|_\infty$ d'où la convergence absolue et aussi la convergence simple de $\sum u_n$. Par inégalité triangulaire généralisée, on a

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty$$

d'où

$$\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty$$

Le résultat suit. □

Remarque : Si les fonctions u_n sont à valeurs dans F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, la convergence absolue de $\sum u_n(x)$ pour $x \in \mathrm{A}$ signifie la convergence de $\sum \|u_n(x)\|$.

Commentaire : En pratique, pour une série de fonctions pour laquelle la convergence uniforme est requise (pour dériver, pour échanger somme et limite,...), on essaie d'abord d'établir la convergence normale et si ça ne fonctionne pas, on se rabat sur la convergence uniforme (qui demande souvent plus de finesse).

Exemples : 1. La série $\sum u_n$ avec $u_n(x) = x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-1\,;1\,[$. En effet, soit $[-a\,;a\,]$ avec $a \in [\,0\,;1\,[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_{\infty,[-a\,;a]} \leqslant a^n$$

Le résultat suit puisque tout segment de $]-1\,;1[$ est inclus dans un segment de $]-1\,;1[$ centré en 0.

2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ converge normalement sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > 1$.

En effet, pour $a > 1$, on a $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_n\|_{\infty,[a\,;+\infty[} = \dfrac{1}{n^a}$

On en déduit notamment la convergence uniforme sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > 1$ bien que celle-ci n'ait pas lieu sur $]1\,;+\infty[$.

3. La série $\sum u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2x+1}$ converge normalement sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$. En effet, pour $a > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^2a+1}$$

On en déduit notamment la convergence uniforme sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$ bien que celle-ci n'ait pas lieu sur $]0\,;+\infty[$.

3 Continuité, double limite

Théorème 11. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur* A*. Si $\sum u_n$ converge uniformément sur* A*, alors sa somme est continue sur* A.

Démonstration. On applique le corollaire 1 . □

Exemple : La fonction $\mathrm{S} :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est continue comme somme de séries de fonctions continues convergeant uniformément sur $]0\,;+\infty[$. On a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) + \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x}$$

Par continuité, il vient $\qquad \mathrm{S}(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{S}(1) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On en déduit $\qquad \mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$

Théorème 12. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle* I*. Si $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de* I*, alors sa somme est continue sur* I.

Démonstration. On applique le corollaire 2 . □

Exemple : Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n :]1\,;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$. Il s'agit d'une série de fonctions continues. Soit $a > 1$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_{\infty,[a\,;+\infty[} = \frac{1}{n^a} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n^a} \text{ converge}$$

ce qui prouve la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > 1$ et donc la convergence uniforme sur tout sur tout segment de $]1\,;+\infty[$. On en déduit la continuité de ζ

sur $]1\,;+\infty[$.

Commentaire : Ces résultats ouvrent des perspectives : on peut désormais utiliser les séries de fonctions pour construire des fonctions singulières, continues et nulle part dérivables.

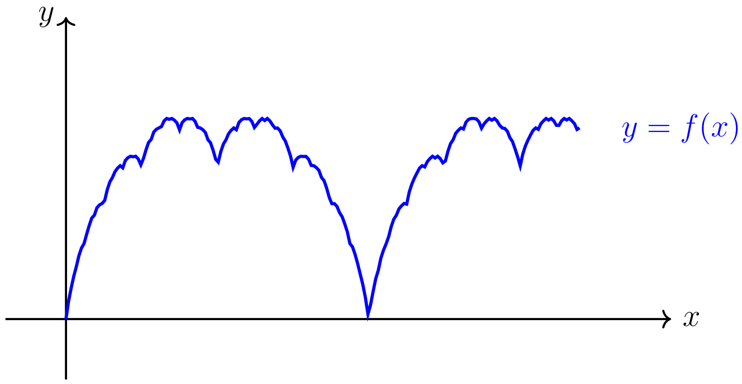


FIGURE 7 – Courbe du blanc-manger

Théorème 13. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur* A *et $a \in \bar{\mathrm{A}}$ ou a éventuellement infini si* A *partie non bornée de $\mathbb{R}$. Si chaque u_n admet une limite finie ℓ_n en a, alors $\sum \ell_n$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

autrement dit

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} u_n(x)$$

Démonstration. On applique le théorème de la double limite 5 à la suite de fonctions $(\mathrm{S}_n)_n$ en utilisant le fait que $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{S}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lim\limits_{x \to a} u_n(x)$. □

Exemples : 1. On note $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$ pour $x > 0$. On a $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ puis $\mathrm{S}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ par comparaison série/intégrale. En effet, pour $x > 0$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \mathrm{S}(x) - \frac{1}{x^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2} = \frac{1}{x+1} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2} = \frac{1}{x}$$

On en déduit

$$\mathrm{S}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Variante : On peut aussi encadrer

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times]1\,;+\infty[\qquad \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \frac{1}{n-1+x} - \frac{1}{n+x}$$

Par télécopage, il vient

$$\forall x > 1 \qquad \frac{1}{x} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{1}{x-1}$$

et on retrouve le résultat annoncé.

2. On note $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ pour $x>0$ avec $u_n :]\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{n(1+nx)}$. On a

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \|u_n\|_{\infty,[\,1\,;+\infty\,[}=\frac{1}{n(1+n)} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(1+n)} \text{ converge}$$

d'où la convergence normale et donc uniforme de $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$. D'après le théorème de la double-limite, on a

$$\mathrm{S}(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Par ailleurs $\qquad \forall(n,x)\in\mathbb{N}^*\times\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad v_n(x)=\dfrac{x}{n(1+nx)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\dfrac{1}{n^2}$

et $\qquad \forall n\geqslant 1 \qquad \|v_n\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge

d'où la convergence normale et donc uniforme de $\sum_{n\geqslant 1}v_n$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. D'après le théorème de la double limite, on trouve $x\mathrm{S}(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\zeta(2)$ et on conclut

$$\mathrm{S}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\zeta(2)}{x}$$

4 Intégration

Théorème 14. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle I et $a\in\mathrm{I}$. On suppose que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I. On pose*

$$\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathrm{I} \qquad \mathrm{U}_n(x)=\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors, la série $\sum\mathrm{U}_n$ converge uniformément vers $x\mapsto\int_a^x\mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$ sur tout segment de I avec $\mathrm{S}=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

Démonstration. On applique le théorème 6 à la suite de fonctions $(\mathrm{S}_n)_n$ en utilisant, par linéarité de l'intégrale, l'égalité

$$\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathrm{I} \qquad \sum_{k=0}^{n}\int_a^x u_k(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x\sum_{k=0}^{n}u_k(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x\mathrm{S}_n(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Corollaire 4. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur le segment $[\,a\,;b\,]$. On suppose que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[\,a\,;b\,]$. Alors la série $\sum\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Application du théorème précédent avec $\mathrm{I}=[\,a\,;b\,]$. □

Exemples : 1. Par convergence uniforme de la série concernée, on a

$$\int_1^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(n+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] = 1$$

On peut aussi invoquer le théorème d'intégration terme à terme.

2. Par convergence uniforme de la série concernée, on a

$$\int_1^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{n+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

Le théorème d'intégration terme à terme est inopérant dans cette situation.

5 Dérivation

Théorème 15. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Si $\sum u_n$ converge simplement sur I et si $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I, alors $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$$

Démonstration. On applique le théorème 7 à la suite de fonctions $(\mathrm{S}_n)_n$ en utilisant la linéarité de la dérivation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_n' = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)' = \sum_{k=0}^{n} u_k'$$

$\square$

Théorème 16. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I avec k entier non nul. Si $\sum u_n^{(j)}$ converge simplement sur I pour $j \in [\![0\,;\, k-1]\!]$ et si $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors $\sum u_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I pour tout $j \in [\![0\,;\, k]\!]$ et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec*

$$\forall j \in [\![0\,;\, k]\!] \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}$$

Démonstration. On applique le théorème 8 à la suite de fonctions $(\mathrm{S}_n)_n$ en utilisant la linéarité de la dérivation :

$$\forall (n, j) \in \mathbb{N} \times [\![0\,;\, k]\!] \qquad \mathrm{S}_n^{(j)} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^{(j)} = \sum_{k=0}^{n} u_k^{(j)}$$

$\square$

Exemple : La fonction $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n :]\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]\,0\,;+\infty\,[$ d'après le théorème des séries alternées. Puis, les u_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \forall x > 0 \qquad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k} k!}{(x+n)^{k+1}}$$

d'où $\quad \forall a > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_n^{(k)}\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}} \quad$ et $\quad \sum \dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ converge

On en déduit la convergence normale et donc la convergence uniforme de $\sum u_n^{(k)}$ sur tout intervalle $[\,a\,;+\infty\,[$ avec $a > 0$ d'où le caractère $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour tout $a > 0$ donc sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
Remarque : On peut aussi vérifier directement la convergence uniforme sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de $\sum u_n^{(k)}$ pour tout k entier avec un contrôle de reste.

IV Approximation uniforme

1 Fonctions en escalier

Rappels : On note $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[\,a\,;b\,]$. On a $\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{K})$ s'il existe une subdivision $(a_i)_{i\in[\![0\,;\,n]\!]}$ de $[\,a\,;b\,]$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, la restriction $\varphi_{|_{]\,a_i\,;a_{i+1}\,[}}$ est constante.

Théorème 17. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{K})$. On a*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{K}) \quad | \quad \|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

ou

$$\exists (\varphi_n)_n \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \quad | \quad \|f-\varphi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Démonstration. Supposons f continue sur $[\,a\,;b\,]$. D'après le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur $[\,a\,;b\,]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2 \qquad |x-y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Considérons une subdivision $(a_0,\ldots,a_n)$ de $[\,a\,;b\,]$ tel que $|a_{i+1}-a_i| \leqslant \eta$ pour tout $i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$. On définit φ sur $[\,a\,;b\,]$ par

$$\forall i \in [\![0\,;\,n-1]\!] \qquad \forall x \in [\,a_i\,;a_{i+1}\,[\qquad \varphi(x) = f(a_i) \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(b)$$

Par construction, on a $\qquad \varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{K}) \quad$ et $\quad \|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$

Pour f continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$, il existe une subdivision $(a_0,\ldots,a_n)$ tel que $f_{|_{]\,a_i\,;a_{i+1}\,[}}$ se prolonge par continuité sur $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$ pour tout $i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, pour tout $i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, il existe $\varphi_i \in \mathscr{E}([\,a_i\,;a_{i+1}\,],\mathbb{K})$ telle que $|f(x)-\varphi_i(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \,]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. On définit

$$\forall i \in [\![0\,;\,n-1]\!] \qquad \forall x \in \,]\,a_i\,;a_{i+1}\,[\qquad \varphi(x) = \varphi_i(x) \qquad \varphi(a_i) = f(a_i) \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(b)$$

Par construction, on a $\qquad \varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{K}) \quad$ et $\quad \|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$

□

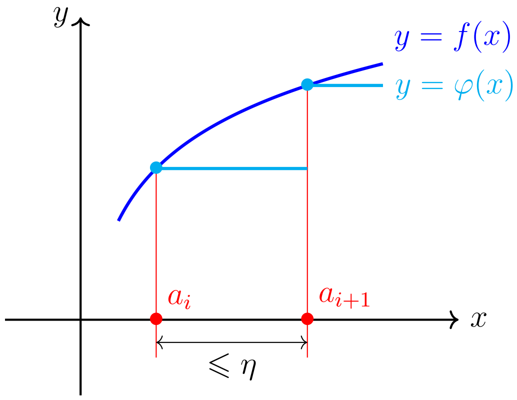


FIGURE 8 – Approximation par une fonction en escalier

Remarque : Dans $\mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{K})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, on a montré que l'ensemble des fonctions en escalier est dense, autrement dit

$$\overline{\mathscr{E}([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{K})} = \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{K})$$

2 Théorème de Weierstrass

Théorème 18. *Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales, i.e. pour* $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{K})$

$$\exists (\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}} \quad | \quad \|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ou $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \quad | \quad \|\mathrm{P} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Démonstration. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$ avec $x \in [\,0\,;1\,]$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul. Pour $n \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$, on note

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{B}_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right]$$

On a $\mathrm{S}_n \sim \mathscr{B}(n,x)$ et par transfert, on trouve

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{B}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$$

Les polynômes $(\mathrm{B}_n(f))_n$ sont appelés *polynômes de Bernstein*. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right]\right| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right|\right]$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note $$\mathrm{A}_\varepsilon = \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| \geqslant \varepsilon\right\}$$

Puis $$\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right|\right] = \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right|(\mathbb{1}_{\Omega\smallsetminus\mathrm{A}_\varepsilon} + \mathbb{1}_{\mathrm{A}_\varepsilon})\right]$$

et $$\mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right|\mathbb{1}_{\mathrm{A}_\varepsilon}\right] \leqslant \mathbb{E}\left(2\|f\|\mathbb{1}_{\mathrm{A}_\varepsilon}\right) = 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\mathrm{A}_\varepsilon)$$

D'où $\quad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad |\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|f\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\Omega \smallsetminus \mathrm{A}_\varepsilon}\right] + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\mathrm{A}_\varepsilon)$

La fonction f est continue sur le compact $[\,0\,;1\,]$ donc uniformément continue sur $[\,0\,;1\,]$ d'après le théorème de Heine. Soit $\delta > 0$. On choisit désormais $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (u,v) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad |u - v| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(u) - f(v)| < \delta$$

Ainsi
$$\left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| < \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right| < \delta\right\}$$

Par suite, pour $x \in [\,0\,;1\,]$, il vient

$$|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \mathbb{E}\left(\delta \mathbb{1}_{\Omega \smallsetminus \mathrm{A}_\varepsilon}\right) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\mathrm{A}_\varepsilon) \leqslant \delta + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\mathrm{A}_\varepsilon)$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la variable S_n ayant un moment d'ordre deux (variable aléatoire finie), on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) = \frac{nx(1-x)}{n^2\varepsilon^2}$$

Par ailleurs
$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$$

D'où
$$\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \leqslant \delta + \frac{\|f\|_\infty}{2n\varepsilon^2}$$

Par suite $\qquad \forall \delta > 0 \qquad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \leqslant 2\delta$

Autrement dit
$$\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $t \mapsto f(a + t(b-a))$ sur $[\,0\,;1\,]$. □

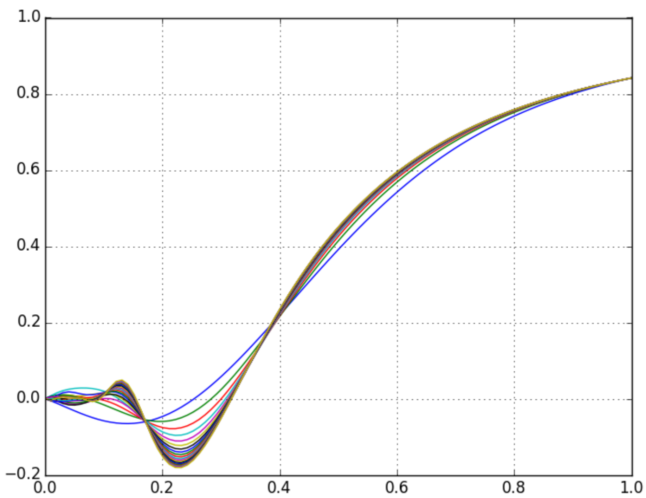


Figure 9 – Suite de polynômes de Bernstein

Remarque : Dans $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, on a montré que l'ensemble des fonctions polynomiales est dense, autrement dit (avec l'abus « habituel » où l'on confond polynôme et fonction polynomiale)

$$\overline{\mathbb{K}[\mathrm{X}]} = \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$$

Code python :

```
import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import binom

def Bnf(n,f,x):
    res=0
    for k in range(n+1):
        res+=binom(n,k)*f(k/n)*x**k*(1-x)**(n-k)
    return res

def f(t):
    return (t!=0)and t*np.sin(1/t)

tx=np.linspace(0,1,100)
tn=range(10,210,10)
tB=[]
for n in tn:
    tBnf=[Bnf(n,f,x) for x in tx]
    tB.append(tBnf)

for k in range(0,len(tn)):
    plt.plot(tx,tB[k])
plt.grid();plt.show()
```

Annexe

Théorème de Convergence dominée

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$ *vérifiant :*

1. *les fonctions f_n sont continues par morceaux ;*
2. *la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur* I *vers f continue par morceaux ;*
3. *Domination : il existe $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n| \leqslant \varphi$$

Alors, les fonctions f_n et f sont intégrables sur I *et*

$$\int_{\mathrm{I}} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathrm{I}} f$$

Démonstration simplifiée. On renforce les hypothèses en supposant que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I. Si I est un segment, le résultat est immédiat. On suppose que I n'est pas un segment, par exemple $\mathrm{I} = [\,a\,;b\,[$. On a

$$\int_a^b \varphi - \int_a^x \varphi \xrightarrow[x\to b]{} 0$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe un segment $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}$ tel que

$$\int_{\mathrm{I}} \varphi \mathbb{1}_{\mathrm{I}\smallsetminus\mathrm{K}} = \int_{\mathrm{I}} \varphi - \int_{\mathrm{K}} \varphi \leqslant \varepsilon$$

Par suite, on a pour n entier

$$\left|\int_{\mathrm{I}} (f_n - f)\right| = \left|\int_{\mathrm{I}} (f_n - f)\,(\mathbb{1}_{\mathrm{K}} + \mathbb{1}_{\mathrm{I}\smallsetminus\mathrm{K}})\right| \leqslant \int_{\mathrm{K}} |f_n - f| + 2\int_{\mathrm{I}} \varphi \mathbb{1}_{\mathrm{I}\smallsetminus\mathrm{K}}$$

On choisit N entier pour avoir $\|f_n - f\|_{\infty,\mathrm{K}} \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et il vient

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\int_{\mathrm{I}} |f_n - f|\right| \leqslant \varepsilon(2 + \max \mathrm{K} - \min \mathrm{K})$$

Le résultat suit. □