ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°42

Exercice 1 (**)

Établir
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Corrigé : L'intégrande est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on a
$$\forall t > 0 \qquad \frac{\sin(t)}{e^t - 1} = \frac{\sin(t)e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sin(t)e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-(n+1)t}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\, dt$ converge et après intégration par parties, on trouve
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\, dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Avec l'inégalité classique $|\sin(t)| \leqslant t$ pour t réel, on a par comparaison la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(t)|\, e^{-(n+1)t}\, dt$ pour n entier avec
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(t)|\, e^{-(n+1)t}\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\, dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et on en déduit la convergence de la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |\sin(t)|\, e^{-(n+1)t}\, dt$. D'après le théorème d'intégration terme à terme, on obtient la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1}\, dt$ avec
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1}\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-(n+1)t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-(n+1)t}\, dt$$

Par convergence absolue, on peut écrire
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-(n+1)t}\, dt &= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-((n+1)-i)t}\, dt \right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{(n+1) - i} \right) = \frac{1}{(n+1)^2 + 1} \end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}}$$

Exercice 2 (**)

Établir
$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^4}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)}$$

Corrigé : On pose
$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad f(t) = \frac{1-t}{1-t^4}$$

On a $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ et $f(t) \xrightarrow[t\to 1]{} \dfrac{1}{4}$ soit en factorisant avec l'identité de Bernoulli ou en identifiant l'inverse d'un taux de variation. Ainsi, la fonction f est intégrable sur $[\,0\,;1\,[$. On a

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[(1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} t^{4n}\right]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{+\infty}(1-t)t^{4n}\right]\,\mathrm{d}t$$

On pose $\qquad \forall (n,t) \in \mathbb{N}\times[\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) = (1-t)t^{4n}$

Les f_n sont continues par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$, intégrables sur ce segment. La série géométrique $\sum(1-t)t^{4n}$ converge simplement sur $[\,0\,;1\,]$ vers une fonction continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$ avec

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(1-t)t^{4n} = \begin{cases} \dfrac{1-t}{1-t^4} & \text{si } t \in [\,0\,;1\,[\\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Enfin, on a

$$\sum \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum \int_0^1 [t^{4n} - t^{4n+1}]\,\mathrm{d}t = \sum \frac{1}{(4n+1)(4n+2)}$$

avec
$$\frac{1}{(4n+1)(4n+2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et on conclut

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)}}$$

Exercice 3 (***)

En considérant $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ pour n entier, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u$.

Corrigé : Pour n entier, l'intégrande est continue sur $[\,0\,;1\,[$ et prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[\,0\,;1\,[$. On observe

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Toutefois, aucune dominante intégrable indépendante de n ne semble se dévoiler. Pour n entier non nul, transformons l'intégrale avec le changement de variables $u = t^n$. On obtient (intégrales de même nature donc convergentes et par conséquent égales)

$$\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u-u^2}{n(1-u^{\frac{1}{n}})}u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1-u}{n(1-u^{\frac{1}{n}})}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

Or $\qquad \forall u \in]\,0\,;1\,] \qquad n(1-u^{\frac{1}{n}}) = n\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln(u)$

D'où $\qquad \forall u \in]\,0\,;1\,[\qquad \dfrac{1-u}{n(1-u^{\frac{1}{n}})}u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{u-1}{\ln(u)}$

Avec l'inégalité $1 - v^n \leqslant n(1-v)$ pour $v \in [\,0\,;1\,]$, il vient

$$\forall u \in]\,0\,;1\,[\qquad 0 \leqslant \frac{1-u}{n(1-u^{\frac{1}{n}})} u^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$$

La dominante est clairement intégrable sur $]\,0\,;1\,[$ et par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u}$$

On peut procéder très différemment. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = \frac{t^n - 1}{1-t} + \frac{1-t^{2n}}{1-t} = -\sum_{k=0}^{n-1} t^k + \sum_{k=0}^{2n-1} t^k = \sum_{k=n}^{2n-1} t^k$$

Par suite $\displaystyle \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=n}^{2n-1} t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{2n-1} \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$

On reconnaît alors une somme de Riemann avec

$$\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

On conclut $\displaystyle \boxed{\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u = \ln 2}$

Exercice 4 (***)

On pose $\displaystyle \qquad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^p \cos(t)^n\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_p = \int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier la convergence de l'intégrale définissant I_p pour p entier.
2. Établir $\displaystyle \qquad n^{\frac{p+1}{2}} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{I}_p$

Corrigé : 1. Soit p entier. L'intégrande $t \mapsto t^p \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et par croissances comparées, on a $t^p \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison et critère de Riemann, on a

$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } \mathrm{I}_p \text{ est convergente pour tout } p \text{ entier.}}$$

2. Avec le changement de variables $u = \sqrt{n}t$, il vient pour $(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

$$n^{\frac{p+1}{2}} a_n = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{avec} \quad \forall u \geqslant 0 \qquad f_n(u) = u^p \cos^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \mathbb{1}_{[\,0\,;\sqrt{n}\frac{\pi}{2}\,[}$$

On a $\displaystyle \forall u \geqslant 0 \qquad f_n(u) = u^p \mathrm{e}^{n \ln\cos\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)} = u^p \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{u^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = u^p \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} u^p \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$

Reste à établir une domination. Par convexité, on a $\ln x \leqslant x - 1$ pour $x > 0$ d'où

$$\forall u \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f_n(u) \leqslant u^p \mathrm{e}^{-n\left(1-\cos\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)} = u^p \mathrm{e}^{-2n\sin^2\left(\frac{u}{2\sqrt{n}}\right)}$$

Toujours par convexité, on a $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$ pour $x \in \left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ d'où

$$\forall u \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f_n(u) \leqslant u^p \mathrm{e}^{-2n\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{u^2}{4n}} = u^p \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi^2}u^2}$$

La dominante $u \mapsto u^p \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi^2}u^2}$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $u^p \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi^2}u^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ ce qui prouve son intégrabilité. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{n^{\frac{p+1}{2}} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{I}_p}$$

Exercice 5 (****)

Soient les suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ avec $a \geqslant b > 0$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

On pose

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n \leqslant a_n$$
En déduire la monotonie des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ puis leur convergence vers une limite commune notée $\mathrm{M}(a,b)$.
2. Justifier la convergence de l'intégrale $\mathrm{I}(a,b)$.
3. Avec le changement de variables $t = \dfrac{1}{2}\left(u - \dfrac{ab}{u}\right)$, établir
$$\mathrm{T}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \mathrm{T}(a,b)$$
4. Montrer
$$\mathrm{T}(a,b) = \frac{\pi}{\mathrm{M}(a,b)}$$

Corrigé : 1. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont positives par récurrence immédiate. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, on a les équivalences

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \iff \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant xy \iff (x-y)^2 \geqslant 0$$

En appliquant l'inégalité de gauche pour $(x,y) = (a_n, b_n)$, il s'ensuit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n \leqslant a_n}$$

puis
$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{b_n^2} = b_n$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_n \text{ décroît et la suite } (b_n)_n \text{ croît.}}$$

La suite $(a_n)_n$ est décroissante minorée, la suite $(b_n)_n$ est croissante majorée. Par limite monotone, ces suites sont convergentes et notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty}$, il vient

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \frac{\ell + \ell'}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = \ell'$$

Ainsi
$$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{M}(a,b) \quad \text{et} \quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{M}(a,b)}$$

Remarque : Cette limite commune est appelée *moyenne arithmético-géométrique* ou aussi *moyenne de Gauss.*

2. On pose
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

On a $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, paire et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{I}(a,b) \text{ converge.}}$$

3. On pose $\qquad \forall u > 0 \qquad \varphi(u) = \dfrac{1}{2}\left(u - \dfrac{ab}{u}\right)$

L'application φ réalise une bijection croissante de $\mathscr{C}^1$ de $]\,0\,;+\infty\,[$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Tous calculs effectués, d'après le théorème de changement de variables, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Par parité de l'intégrande, on conclut

$$\boxed{\mathrm{T}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \mathrm{T}(a,b)}$$

Remarque : Le changement de variable non trivial utilisé plus haut est appelé *transformée de Landen.*

4. D'après la relation précédemment établie, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{T}(a_n, b_n) = \mathrm{T}(a_{n+1}, b_{n+1})$$

On pose $\qquad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{(a_n^2+t^2)(b_n^2+t^2)}}$

On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mathrm{M}(a,b)+t^2} \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{b^2+t^2}$$

Comme $t \mapsto \dfrac{1}{b^2+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on obtient par convergence dominée

$$\mathrm{T}(a_n,b_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{M}(a,b)^2+t^2} = \frac{1}{\mathrm{M}(a,b)}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\mathrm{M}(a,b)}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{T}(a,b) = \dfrac{\pi}{\mathrm{M}(a,b)}}$

Exercice 6 (****)

On rappelle l'existence de la constante γ d'Euler définie par

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : On pose $f :]\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$. On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ avec

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument.}}$$

Pour n entier non nul, on pose

$$\forall t \geqslant 0 \qquad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t \in \,]\,0\,;n\,] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Pour $t > 0$ et $n \geqslant t$, on a

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \ln(t) = \mathrm{e}^{-t+\mathrm{o}(1)} \ln(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$$

et avec l'inégalité de concavité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u < 1$, on obtient

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}\,|\ln(t)|$$

l'inégalité étant trivialement réalisée pour $t > n$. Ainsi, par convergence dominée, on a

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On note $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit n entier non nul. Avec le changement de variable $t = nu$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n = n\int_0^1 (1-u)^n \ln(nu)\,\mathrm{d}t &= n\ln(n)\int_0^1 (1-u)^n\,\mathrm{d}u + n\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{n}{n+1}\ln(n) + n\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Pour l'intégrale restante, on procède en intégrant par parties avec un bon choix de primitive pour garantir un crochet fini. Les fonctions $u \mapsto \dfrac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}$ et $u \mapsto \ln(u)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;1\,]$ avec

$$\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln(u) \underset{u\to 0}{=} \frac{1-(1-(n+)u+\mathrm{o}(u))}{n+1}\ln(u) \underset{u\to 0}{=} (1+\mathrm{o}(1))u\ln(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

par croissances comparées. Ainsi, le crochet étant fini, on obtient

$$\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)\,\mathrm{d}u = \underbrace{\left[\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln(u)\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}-1}{u}\,\mathrm{d}u$$

Enfin, un dernier changement de variable $v = 1-u$ donne

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-v^{n+1}}{1-v}\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} v^k\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{I}_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\gamma$$

Et on conclut $$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\gamma}$$