Feuille d'exercices n°41

Exercice 1 (***)

Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t+\ldots+t^{n-1}}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 2 (***)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$$

Exercice 3 (***)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \cos\left(\frac{t}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 4 (***)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{t\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5 (**)

Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[$. On pose
$$u_n(x) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)} \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{I}_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

1. Justifier que $\Gamma(x)$ est bien définie pour $x > 0$.
2. Montrer $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{I}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)$
3. En déduire un équivalent simple de $u_n(x)$ pour $x > 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6 (***)

On pose
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

1. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, déterminer une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ avec des factorielles.
2. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Exercice 7 (****)

On pose $$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_n$ est bien définie puis déterminer un développement asymptotique à trois termes pour $n \to +\infty$.
2. Montrer la convergence de la série $\sum(u_n - 1)$ puis déterminer un équivalent simple de son reste d'ordre n.