Feuille d'exercices n°42

Exercice 1 (**)

Établir
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Indications : Faire apparaître une somme géométrique dans l'intégrale puis utiliser l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant t$ avec $t \geqslant 0$ pour l'intégration terme à terme.

Exercice 2 (**)

Établir
$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)}$$

Indications : Identifier une somme géométrique dans l'intégrande.

Exercice 3 (***)

En considérant $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ pour n entier, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u$.

Indications : Pour n entier non nul, utiliser le changement de variables $u = t^n$ puis utiliser l'inégalité $1 - v^n \leqslant n(1-v)$ pour $v \in [\,0\,;1\,]$. Écrire ensuite l'intégrale d'origine avec des sommes de Riemann.

Exercice 4 (***)

On pose
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^p \cos(t)^n\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_p = \int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale définissant I_p pour p entier.
2. Établir
$$n^{\frac{p+1}{2}} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{I}_p$$

Indications : 2. Pour n entier non nul, utiliser le changement de variables $u = \sqrt{n}t$ puis des inégalités de concavité pour ln puis sin.

Exercice 5 (****)

Soient les suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ avec $a \geqslant b > 0$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

On pose
$$\mathrm{I}(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n \leqslant a_n$$
En déduire la monotonie des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ puis leur convergence vers une limite commune notée $\mathrm{M}(a,b)$.
2. Justifier la convergence de l'intégrale $\mathrm{I}(a,b)$.
3. Avec le changement de variables $t = \frac{1}{2}\left(u - \frac{ab}{u}\right)$, établir
$$\mathrm{T}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \mathrm{T}(a,b)$$
4. Montrer
$$\mathrm{T}(a,b) = \frac{\pi}{\mathrm{M}(a,b)}$$

Indications : 1. Utiliser le fait que $(x-y)^2 \geqslant 0$ avec x et y réels positifs. Invoquer le théorème de limite monotone pour chaque suite et montrer l'égalité de leurs limites.
3. Effectuer courageusement le changement de variable indiqué sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. Considérer la suite $(\mathrm{T}(a_n,b_n))_n$ et conclure par convergence dominée.

Exercice 6 (****)

On rappelle l'existence de la constante γ d'Euler définie par

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Indications : Considérer pour n entier non nul

$$\mathrm{I}_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Justifier que $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$ puis transformer I_n avec le changement de variable $t = nu$, procéder à une intégration par partie avec un choix adapté de primitive dans l'intégrale restante et réaliser un dernier changement de variable pour voir apparaître une somme géométrique.