Feuille d'exercices n°45

Exercice 1 (**)

Une limite uniforme de fonctions lipschitziennes sur un intervalle I est-elle lipschitzienne ?

Corrigé : On considère $f = \sqrt{\cdot}$ qui est uniformément continue sur $[\,0\,;1]\,]$ mais non lipschitzienne. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(\mathrm{P}_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ telle que $\|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et les fonctions polynomiales P_n sont dérivables de dérivées bornées sur $[\,0\,;1\,]$ donc lipschitzienne. On conclut

$$\boxed{\text{Une limite uniforme de fonctions lipschitziennes n'est pas forcément lipschitzienne.}}$$

Remarque : Le caractère lipschitzien n'est pas préservé *a priori*. En revanche, une telle limite uniforme de fonctions lipschitziennes donc uniformément continues est également uniformément continues.

Exercice 2 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec f non nulle et telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On pose

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = f(nx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$$

Étudier les modes de convergence de $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ puis $(f_n g_n)_n$.

Corrigé : Pour $x > 0$, on a $nx \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ d'où $f_n(x) = f(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f_n(0) = 0$ pour n entier d'où la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction nulle. Comme $f \neq 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Avec $x_n = \dfrac{x_0}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$f_n(x_n) = f(x_0) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Soit $a > 0$. Pour $\varepsilon > 0$, comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant \mathrm{A}$ donc pour n assez grand, il vient

$$\forall u \geqslant na \qquad |f(u)| \leqslant \varepsilon$$

d'où
$$\forall x \geqslant a \qquad |f_n(x)| = |f(nx)| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit
$$\|f_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (f_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement vers la fonction nulle, pas} \\ \text{uniformément sur } \mathbb{R}_+ \text{ mais uniformément sur } [\,a\,;+\infty\,[\text{ avec } a > 0.\end{array}}$$

Pour $x \geqslant 0$, on a $g_n(x) = f\left(\dfrac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0) = 0$ ce qui prouve la convergence simple de $(g_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction nulle. Avec $y_n = nx_0$ pour n entier non nul, on a

$$g_n(y_n) = f(x_0) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Soit $a \geqslant 0$. Pour $\varepsilon > 0$, comme $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in [\,0\,;\eta\,]$ avec $\eta \geqslant 0$ donc pour n assez grand, il vient

$$\forall u \leqslant \frac{a}{n} \qquad |f(u)| \leqslant \varepsilon$$

d'où
$$\forall x \in [\,0\,;a\,] \qquad |g_n(x)| = \left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit
$$\|g_n\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (g_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement vers la fonction nulle, pas uniformément sur } \mathbb{R}_+ \text{ mais uniformément sur } [\,0\,;a\,] \text{ avec } a \geqslant 0.}$$

D'après ce qui précède, la suite $(f_ng_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose d'un seuil N entier tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \forall u \in \left[\,0\,;\frac{1}{n}\,\right] \qquad |f(u)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall v \geqslant n \qquad |f(v)| \leqslant \varepsilon$$

Puis, on a pour n entier non nul

$$\|f_ng_n\|_\infty \leqslant \|f_ng_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} + \|f_ng_n\|_{\infty,[\,1\,;+\infty\,[}$$

d'où
$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \|f_ng_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} \leqslant \varepsilon\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f_ng_n\|_{\infty,[\,1\,;+\infty\,[} \leqslant \varepsilon\|f\|_\infty$$

Par conséquent
$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \|f_ng_n\|_\infty \leqslant 2\varepsilon\|f\|_\infty$$

majorant qui peut être rendu arbitrairement petit et on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (f_ng_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle.}}$$

Exercice 3 (***)

On pose

$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad f(x) = 2x(1-x) \quad \text{puis} \quad g_0 = f \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad g_{n+1} = g_n \circ f$$

Étudier les modes de convergence de la suite de fonctions $(g_n)_n$.

Corrigé : Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$. On note $u_n = g_n(x)$ pour n entier. On a $f([\,0\,;1\,]) \subset \left[\,0\,;\frac{1}{2}\,\right]$ d'où $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $\left[\,0\,;\frac{1}{2}\,\right]$. Comme $f(x) \geqslant x$ pour $x \in \left[\,0\,;\frac{1}{2}\,\right]$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ croît et comme elle est majorée, elle converge par limite monotone. Comme $u_0 = x > 0$, la suite $(u_n)_n$ converge vers l'unique point fixe non nul de f, c'est-à-dire $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ et par conséquent

$$\boxed{g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} g \quad \text{avec} \quad g : x \mapsto \frac{1}{2}}$$

On considère $x \in \left]\,0\,;\frac{1}{2}\,\right]$ puisque ce cas est atteint dès que $n \geqslant 1$. La suite g_n est une composée de fonctions croissantes sur $\left]\,0\,;\frac{1}{2}\,\right]$ donc est croissante et par conséquent

$$\|g_n - g\|_{\infty,]\,0\,;\frac{1}{2}\,]} = (g-g_n)(0) = \frac{1}{2}$$

et pour $[\,a\,;b\,] \subset \left]\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$

$$\|g_n - g\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} = (g - g_n)(a) = \frac{1}{2} - g_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (g_n)_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]\,0\,;1\,[,\ \left]\,0\,;\dfrac{1}{2}\right],\ \left[\,\dfrac{1}{2}\,;1\,\right[, \\ \text{mais converge uniformément sur tout segment de ces intervalles.}\end{array}}$$

Exercice 4 (****)

Caractériser les limites uniformes de fonctions lipschitziennes sur un intervalle I.

Corrigé : Une telle limite uniforme est uniformément continue, voir exercice 8 feuille 43. Réciproquement, soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Si $\operatorname{Sup} \mathrm{I} < +\infty$, notant $b = \operatorname{Sup} \mathrm{I}$, on prolonge f sur $[\,b\,;+\infty\,[$ en posant $f(x) = f(b^-)$ pour $x \geqslant b$ et si $\operatorname{Inf} \mathrm{I} > -\infty$, notant $a = \operatorname{Inf} \mathrm{I}$, on prolonge f sur $]\,-\infty\,;a\,]$ en posant $f(x) = f(a^+)$ pour $x \leqslant a$. On peut donc supposer $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |x - y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

On pose $x_k = k\eta$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ensuite, on construit la fonction g_ε affine par morceaux, affine sur tout segment $[\,x_k\,;x_{k+1}\,]$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad g_\varepsilon(x_k) = f(x_k)$$

Sur un intervalle $[\,x_k\,;x_{k+1}\,[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la pente de g_ε est au plus égale à ε/η. Soient x, y réels avec $x \leqslant y$. On dispose de $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant x_j \leqslant y \leqslant x_{j+1}$$

Puis, par inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned}|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)| &\leqslant |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x_{i+1})| + |g_\varepsilon(x_{i+1}) - g_\varepsilon(x_{i+2})| + \ldots + |g_\varepsilon(x_j) - g_\varepsilon(y)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\eta}\,|x_{i+1} - x| + (j - i - 1)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\eta}\,|y - x_j|\end{aligned}$$

et
$$y - x \geqslant y_j - x_{i+1} = \eta(j - i - 1)$$

En observant que $|x_{i+1} - x| \leqslant |y - x|$ et $|y - x_j| \leqslant |y - x|$, on obtient

$$|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)| \leqslant 3\frac{\varepsilon}{\eta}\,|y - x|$$

Enfin, on a

$$|g_\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant |g_\varepsilon(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui prouve que g_ε approche uniformément f. On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'adhérence des fonctions lipschitziennes pour la norme infinie} \\ \text{est l'ensemble des fonctions uniformément continues.}\end{array}}$$

Exercice 5 (****)

On note $\mathrm{N_A(P)} = \underset{t\in \mathrm{A}}{\mathrm{Sup}}\, |\mathrm{P}(t)|$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ avec A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\mathrm{N_A}$ soit une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   On considère A et B des parties infinies compactes de $\mathbb{R}$ distinctes.
   Pour n entier, on pose $f_n(x) = n\dfrac{\mathrm{d}(x,\mathrm{A})}{\mathrm{d}(x_0,\mathrm{A})}$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \mathrm{B} \smallsetminus \mathrm{A}$.

2. À l'aide de la fonction f_n avec n entier, montrer que $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ ne sont pas des normes équivalentes.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ soient équivalentes.
4. Généraliser le résultat précédent pour A et B des parties de $\mathbb{R}$ vérifiant la condition obtenue à la première question.

Corrigé : 1. Supposons A finie non vide. Alors le polynôme $\mathrm{P(X)} = \prod_{\lambda\in\mathrm{A}} (\mathrm{X}-\lambda)$ vérifie $\mathrm{N_A(P)} = 0$ bien que $\mathrm{P} \neq 0$ puisque $\deg \mathrm{P} > 0$. Supposons A non bornée. Alors, l'ensemble $\{|t|\,, t \in \mathrm{A}\}$ est non borné et on ne peut donc définir $\mathrm{N_A(X)}$. Ainsi, il est nécessaire d'avoir A infinie et bornée. Vérifions le caractère suffisant de ces propriétés. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. L'image d'une partie bornée par une application continue est bornée donc $\{|\mathrm{P}(t)|\,, t \in \mathrm{A}\}$ est une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ qui admet donc une borne supérieure. Ainsi, la quantité $\mathrm{N_A(P)}$ est bien définie. Puis

$$\mathrm{N_A(P)} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \forall t \in \mathrm{A} \qquad \mathrm{P}(t) = 0$$

Ainsi P admet une infinité de racines ce qui implique qu'il s'agit du polynôme nul. Les autres propriétés de norme étant vérifiées sans difficultés, on conclut

$$\boxed{\mathrm{N_A} \text{ est une norme sur } \mathbb{R}[\mathrm{X}] \iff \mathrm{A} \text{ est une partie bornée et infinie de } \mathbb{R}}$$

2. Fixons n entier. Soit un segment $[\,\alpha\,;\beta\,]$ contenant $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$. D'après le théorème de Weierstrass appliqué à f_n continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$, on dispose $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,[\,\alpha\,;\beta\,]} < 1$. D'où, par définition de f_n et par choix de $[\,\alpha\,;\beta\,]$

$$\|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,\mathrm{A}} = \mathrm{N_A}(\mathrm{P}_n) \leqslant \|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,[\,\alpha\,;\beta\,]} < 1 \quad \text{et} \quad \|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,\mathrm{B}} \leqslant \|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,[\,\alpha\,;\beta\,]} < 1$$

Par inégalité triangulaire inverse, on obtient

$$\mathrm{N_B}(\mathrm{P}_n) = \|\mathrm{P}_n\|_{\infty,\mathrm{B}} \geqslant |\|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,\mathrm{B}} - \|f_n\|_{\infty,\mathrm{B}}| \geqslant \|f_n\|_{\infty,\mathrm{B}} - 1 \geqslant n-1$$

Ainsi
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{\mathrm{N_A}(\mathrm{P}_n)}{\mathrm{N_B}(\mathrm{P}_n)} < \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\boxed{\text{S'il existe } x_0 \in \mathrm{B} \smallsetminus \mathrm{A}, \text{ les normes } \mathrm{N_A} \text{ et } \mathrm{N_B} \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

Variante : On peut aussi fixer $n = 1$ et agir sur la qualité d'approximation fournie par le théorème de Weierstrass. On a

$$\forall \varepsilon \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \exists \mathrm{P}_\varepsilon \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad | \quad \|\mathrm{P}_\varepsilon - f_1\|_{\infty,[\,\alpha\,;\beta\,]} < \varepsilon$$

En procédant comme ci dessus, on obtient

$$\mathrm{N_A}(\mathrm{P}_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathrm{N_B}(\mathrm{P}_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$$

d'où
$$\mathrm{N_A}(\mathrm{P}_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{N_B}(\mathrm{P}_\varepsilon) \not\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

ce qui contredit l'équivalence des normes.

3. On en déduit que si $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ sont équivalentes, alors $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et par symétrie des rôles $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. La réciproque est immédiate et on a donc montré

$$\boxed{\text{Pour A et B parties compactes infinies de } \mathbb{R} \qquad \mathrm{N_A} \sim \mathrm{N_B} \iff \mathrm{A} = \mathrm{B}}$$

4. Comme $\mathrm{A} \subset \bar{\mathrm{A}}$, il s'ensuit $\mathrm{N_A} \leqslant \mathrm{N_{\bar{A}}}$. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour $a \in \bar{\mathrm{A}}$, il existe $(a_n)_n$ à valeurs dans A telle que $a_n \to a$. Par continuité de $t \mapsto |\mathrm{P}(t)|$, il vient

$$|\mathrm{P}(a_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\mathrm{P}(a)| \quad \text{et} \quad |\mathrm{P}(a_n)| \leqslant \mathrm{N_A}(\mathrm{P})$$

d'où
$$\forall a \in \bar{\mathrm{A}} \qquad |\mathrm{P}(a)| \leqslant \mathrm{N_A}(\mathrm{P})$$

Par conséquent, on a $\mathrm{N_{\bar{A}}} \leqslant \mathrm{N_A}$ et donc $\mathrm{N_A} = \mathrm{N_{\bar{A}}}$ et de même avec B. Les parties $\bar{\mathrm{A}}$ et $\bar{\mathrm{B}}$ étant infinies, bornées et fermées donc compactes, il s'ensuit d'après le résultat qui précède

$$\boxed{\text{Pour A et B parties bornées infinies de } \mathbb{R} \qquad \mathrm{N_A} = \mathrm{N_{\bar{A}}} \sim \mathrm{N_{\bar{B}}} = \mathrm{N_B} \iff \bar{\mathrm{A}} = \bar{\mathrm{B}}}$$

Exercice 6 (****)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ convergeant simplement vers $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$.

1. On suppose $(f_n)_n$ croissante. Montrer que la convergence est uniforme.
2. On suppose que f_n est croissante pour tout n entier. Montrer que la convergence est uniforme.
3. Application : Montrer la convergence sur tout segment de la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Corrigé : 1. Notons $\alpha_n = \|f_n - f\|_\infty$. La suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante minorée donc convergente par limite monotone. Notons $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ et supposons $\alpha > 0$. Posons pour n entier

$$\mathrm{K}_n = \left\{ x \in [\,a\,;b\,] \mid g_n(x) \geqslant \frac{\alpha}{2} \right\} \quad \text{avec} \quad g_n = f - f_n$$

On a $\alpha_n \geqslant \alpha > \alpha/2$ d'où par, définition de α_n,

$$\exists x \in [\,a\,;b\,] \quad | \quad |f_n(x) - f(x)| > \frac{\alpha}{2}$$

Ainsi, l'ensemble K_n est non vide, borné car contenu dans $[\,a\,;b\,]$ et fermé puisque $\mathrm{K}_n = g_n^{-1}\left(\left[\frac{\alpha}{2}\,;+\infty\right[\right)$ est l'image réciproque d'une fermé par une application continue. La famille $(\mathrm{K}_n)_n$ est clairement une suite décroissante de compacts non vides. Par suite, on peut construire une suite $(u_n)_n$ avec $u_n \in \mathrm{K}_n$ pour tout n entier. En particulier, la suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans K_0 compact donc, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injection strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} u$. Pour p entier, la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est à valeurs dans K_p et donc $u \in \mathrm{K}_p$ pour tout p entier, autrement dit $u \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$. On aurait alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(u) - f_n(u) \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0$$

ce qui contredit la limite simple de f_n vers f. Par suite

$$\boxed{\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Remarque : Ce résultat est connu sous l'appellation de *théorème de Dini.*

2. La fonction f est uniformément continue sur $[\,a\,;b\,]$ d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\exists \eta > 0 \quad | \quad \forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2 \qquad |x-y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Considérons une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ telle que $|a_{i+1} - a_i| \leqslant \eta$ pour $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. Il existe $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$ tel que $x \in [\,a_i\,;a_{i+1}\,]$. Par suite

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i| + |f_n(a_i) - f_n(x)|$$

Par convergence simple de f_n vers f, on a

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad |f_n(a_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |f_n(a_{i+1} - f(a_{i+1})| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et en utilisant la croissance de f, on trouve

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leqslant 2\varepsilon + f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i) \\ &\leqslant 2\varepsilon + |f_n(a_{i+1} - f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)| \leqslant 5\varepsilon \end{aligned}$$

Le choix du seuil N étant fait indépendamment de x, on a donc établi

$$\boxed{\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Remarque : Il s'agit du deuxième théorème de Dini.

3. Pour n assez grand, on a $1 + \dfrac{x}{n} > 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] = \exp\left[x + \mathrm{o}(1)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^x$$

Soit n entier non nul. Posons

$$\forall x \in \,]-n\,;n\,[\qquad \varphi_n(x) = \ln\left(\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right) = (n+1)\ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Par dérivation, on trouve

$$\forall x \in \,]-n\,;n\,[\qquad \varphi_n'(x) = \frac{x}{(x+n+1)(x+n)} \quad \text{et} \quad \varphi_n(0) = 0$$

Ainsi, la fonction φ_n décroît sur $]-n\,;0\,]$ s'annule en zéro puis croît sur $[\,0\,;n\,[$. Soit $[\,a\,;b\,]$ un segment, il vient

$$\forall n \geqslant \max(|a|\,,|b|) \qquad \forall x \in [\,a\,;b\,] \subset \,]-n\,;n\,[\qquad f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$$

Ainsi, par application du théorème de Dini, on conclut

$$\boxed{\forall a \leqslant b \qquad \|f_n - \exp\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Remarque : Une preuve de ce dernier résultat sans recours au théorème de Dini a été vue en cours.