ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°43

Exercice 1 (*)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies de $[\,a\,;b\,]$ sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Soit $(x_n)_n \in [\,a\,;b\,]^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Montrer

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Exercice 2 (*)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3 (*)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx}$$

Etudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 4 (**)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \qquad u_n(x) = n\sin x \cos^n x$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 5 (*)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad u_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 6 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dérivée seconde bornée. Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(t) = n\left[f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t)\right]$$

Exercice 7 (**)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Exercice 8 (**)

Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues sur un intervalle I est uniformément continue.

Exercice 9 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $a \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_p \leqslant b$. Montrer

$$\exists (\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}} \qquad \begin{cases} \mathrm{P}_n \to f \text{ uniformément sur } [\,a\,;b\,] \\ \mathrm{P}_n(a_k) = f(a_k) \quad \forall k \in [\![\, 1\,;\,p\,]\!] \end{cases}$$

Exercice 10 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et $(\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CS}} f$. Montrer

$$\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$$

Exercice 11 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n entier. Montrer que $f = 0$.