Feuille d'exercices n°44

Exercice 1 (***)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]}(x)$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Exercice 2 (***)

On pose $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f avec $f_n \geqslant f$.
2. Établir $\forall t \geqslant 0 \quad t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$

   En déduire la convergence uniforme de (f_n) sur $[\,0\,;a\,]$ avec $a > 0$.
3. Montrer que la convergence uniforme a lieu en fait sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 (***)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{P}_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - \mathrm{P}_n^2(x)\right)$$

1. Établir $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$
2. En déduire que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[\,0\,;1\,]$.
3. Construire une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[\,-1\,;1\,]$.

Remarque : sans doute inspirée par la méthode de Newton avec $f : u \mapsto u - x^2$. On trouve

$$u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2u_n} \geqslant u_n + \frac{x - u_n^2}{2}$$

avec $u_n \geqslant \sqrt{x} \leqslant 1$.

Exercice 4 (***)

On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer $\forall (x,n) \in [\,0\,;1\,] \times \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire la convergence simple de $(u_n)_n$.
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge uniformément vers u non nulle solution de $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 5 (***)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de polynômes réels.

1. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est polynomiale.
2. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur tout segment de $\mathbb{R}$. Le résultat précédent persiste-t-il ?

Exercice 6 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.
2. En déduire les comportements de de $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 7 (***)

Pour n entier non nul et $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \dots \left(\int_0^1 f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\,\mathrm{d}x_1\right)\,\mathrm{d}x_2 \dots\right)\,\mathrm{d}x_n$$

1. Soit $r \geqslant 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{rx}$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $a \in [\,0\,;1\,]$ tel que
$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$
2. Soit f définie par $f(x) = \mathrm{P}(\mathrm{e}^x)$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer
$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$
3. En déduire que pour $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, on a
$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

Exercice 8 (***)

Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions k-lipschitzienne sur $[\,0\,;1\,]$ avec $k > 0$. Montre que si $(u_n)_n$ converge simplement, alors elle converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 9 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{K})$. Déterminer

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t$$