ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°45

Exercice 1 (**)

Une limite uniforme de fonctions lipschitziennes sur un intervalle I est-elle lipschitzienne ?

Indications : Chercher un exemple de fonction uniformément continue sur un intervalle I mais non lipschitzienne.

Exercice 2 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec f non nulle et telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. On pose

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = f(nx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$$

Étudier les modes de convergence de $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ puis $(f_n g_n)_n$.

Indications : Pour la convergence uniforme de $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$, considérer des suites de points adaptées. Pour le produit $f_n g_n$, considérer la norme infinie respectivement sur $[\,0\,;1\,]$ et $[\,1\,;+\infty\,[$.

Exercice 3 (***)

On pose

$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad f(x) = 2x(1-x) \quad \text{puis} \quad g_0 = f \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad g_{n+1} = g_n \circ f$$

Étudier les modes de convergence de la suite de fonctions $(g_n)_n$.
Indications : Pour $x \in \,]\,0\,;1\,[$, notant $u_n = g_n(x)$ pour n entier, observer que $f([\,0\,;1\,]) \subset \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ puis montrer la croissance de $(u_n)_n$ et conclure sur la convergence de $(u_n)_n$ et donc la convergence simple de $(g_n)_n$. Justifier que g_n est croissante et conclure sur la convergence uniforme.

Exercice 4 (****)

Caractériser les limites uniformes de fonctions lipschitziennes sur un intervalle I.

Indications : Pour f uniformément continue sur I, prolonger naturellement f sur $\mathbb{R}$ tel que le prolongement soit uniformément continu puis construire une fonction affine par morceaux en considérant une subdivision de $\mathbb{R}$ adaptée au contrôle des écarts de la fonction f.

Exercice 5 (****)

On note $\mathrm{N_A(P)} = \operatorname*{Sup}_{t \in \mathrm{A}} |\mathrm{P}(t)|$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ avec A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\mathrm{N_A}$ soit une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   On considère A et B des parties infinies compactes de $\mathbb{R}$ distinctes.
   Pour n entier, on pose $f_n(x) = n\dfrac{\mathrm{d}(x, \mathrm{A})}{\mathrm{d}(x_0, \mathrm{A})}$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \mathrm{B} \smallsetminus \mathrm{A}$.
2. À l'aide de la fonction f_n avec n entier, montrer que $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ ne sont pas des normes équivalentes.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ soient équivalentes.
4. Généraliser le résultat précédent pour A et B des parties de $\mathbb{R}$ vérifiant la condition obtenue à la première question.

Indications : 1. Considérer A fini ou non borné et établir une contradiction.
2. Pour n entier, utiliser le théorème de Weierstrass pour approcher la fonction f_n et en déduire que $\mathrm{N_B}/\mathrm{N_A}$ n'est pas majoré.
4. Comparer $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_{\bar{A}}}$, $\mathrm{N_B}$ et $\mathrm{N_{\bar{B}}}$.

Exercice 6 (****)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ convergeant simplement vers $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$.

1. On suppose $(f_n)_n$ croissante. Montrer que la convergence est uniforme.
2. On suppose que f_n est croissante pour tout n entier. Montrer que la convergence est uniforme.
3. Application : Montrer la convergence sur tout segment de la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Indications : 1. Supposant $\alpha = \lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty > 0$, considérer les ensembles

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{K}_n = \left\{x \in [\,a\,;b\,] \mid g_n(x) \geqslant \frac{\alpha}{2}\right\} \quad \text{avec} \quad g_n = f - f_n$$

puis $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathrm{K}_n$ pour établir une contradiction.
2. Utiliser l'uniforme continuité de f puis considérer une subdivision de $[\,a\,;b\,]$.
3. Étudier $\ln\left(\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right)$ avec $x \in \,]-n\,;n\,[$ et n entier non nul pour établir la monotonie de $(f_n)_n$.