ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°31

Exercice 1 (*)

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det \mathrm{M} = 1\}$ est-il compact ?

Corrigé : On pose $\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{M}_p = \mathrm{I}_n + p\mathrm{E}_{1,n}$

On a $(\mathrm{M}_p)_p \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $\|\mathrm{M}_p\|_\infty \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ ce qui prouve que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est une partie non bornée. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \text{ n'est pas compact.}}$$

Exercice 2 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et K un compact et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

1. Montrer que si F est un compact, alors $\mathrm{F}+\mathrm{K}$ est un compact.
2. Montrer que si F est fermé, alors $\mathrm{F}+\mathrm{K}$ est un fermé.

Corrigé : 1. Soit $(x_n)_n \in (\mathrm{F}+\mathrm{K})^{\mathbb{N}}$. Il existe $((a_n, b_n))_n\, (\mathrm{F}\times\mathrm{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n = a_n + b_n$ pour tout n entier. Par compacité de $\mathrm{F}\times\mathrm{K}$, il existe φ extractrice telle que

$$(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (a,b) \in \mathrm{F}\times\mathrm{K}$$

Ainsi
$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a+b \in \mathrm{F}+\mathrm{K}$$

On conclut
$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{F}+\mathrm{K} \text{ est compact.}}$$

Variante : Considérons $f : \mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}, (x,y) \mapsto x+y$. L'application f est linéaire et on a

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x,y)\| \leqslant \|x\| + \|y\| = \|(x,y)\|_1$$

d'où sa continuité. L'ensemble $\mathrm{F}\times\mathrm{K}$ est compact comme produit de compacts et par conséquent, l'ensemble $f(\mathrm{F}\times\mathrm{K}) = \mathrm{F}+\mathrm{K}$ est compact.

2. Soit $(x_n)_n \in (\mathrm{F}+\mathrm{K})^{\mathbb{N}}$ convergente. Il existe $(a_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_n \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n = a_n + b_n$ pour tout n entier. Par compacité de K, il existe φ une extractrice telle que $b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} b \in \mathrm{K}$. Par suite, on a la convergence de $(a_{\varphi(n)})_n$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a = x - b$$

et par fermeture de F, il vient que $a = x - b \in \mathrm{F}$ d'où $x = a + b \in \mathrm{F}+\mathrm{K}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{F}+\mathrm{K} \text{ est fermé.}}$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{A} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1 \right\}$. L'ensemble A est-il compact ? Connexe par arcs ?

Corrigé : On a clairement $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}_f(0,1)$ boule unité pour la norme $\|\cdot\|_1$. On pose $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x_k$ et $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1$. Ces applications sont polynomiales donc continues et on a

$$\mathrm{A} = \psi^{-1}(\{0\}) \cap \bigcap_{k=1}^{n} \varphi_k^{-1}([\,0\,;+\infty\,[)$$

Par conséquent, l'ensemble A est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ espace de dimension finie donc A est compact. C'est un ensemble convexe puisque pour x et y dans A, on a

$$\forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i + \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda) y_i = 1$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble A est compact et connexe par arcs.}}$

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{P}$ l'ensemble des matrices de projection de E. L'ensemble $\mathscr{P}$ est-il fermé ? Compact ? Connexe par arcs ?

Corrigé : Dans ce qui suit, on suppose $n \geqslant 2$ (le cas $n = 1$ présente peu d'intérêt). On pose $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^2 - \mathrm{M}$. L'application φ a ses fonctions coordonnées polynomiales ce qui prouve que φ est continue et comme on a $\mathscr{P} = \varphi^{-1}(\{0\})$ image réciproque d'un fermé par une application continue, on conclut que

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{P} \text{ est un fermé.}}$$

On pose $\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{M}_p = \mathrm{E}_{1,1} + p\mathrm{E}_{2,1}$

On vérifie sans difficulté que $(\mathrm{M}_p)_p \in \mathscr{P}^{\mathbb{N}}$ et $\|\mathrm{M}_p\|_\infty \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$ ce qui prouve que l'ensemble $\mathscr{P}$ n'est pas borné et par conséquent

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{P} \text{ n'est pas compact.}}$$

Remarque : Il faut $n \geqslant 2$ mais le cas $n = 1$ ne présente que peu d'intérêt.

Enfin, on a $\det \mathscr{P} = \{0, 1\}$. En effet, comme 0 et I_n sont éléments de $\mathscr{P}$, on a $\{0,1\} \subset \det \mathscr{P}$ et l'inclusion réciproque découle du fait que l'unique projecteur injectif est l'identité, donc toute matrice de projection qui n'est pas I_n est de déterminant nul. Comme l'image directe de $\mathscr{P}$ par l'application continue det n'est pas connexe par arcs, on conclut que

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{P} \text{ n'est pas connexe par arcs.}}$$

Exercice 5 (*)

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-il connexe par arcs ?

Corrigé : Notons $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

On pose $\varphi(t) = t\mathrm{M}$ pour $t \in [0\,;1]$. On a φ continue, à valeurs dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ avec $\varphi(1) = \mathrm{M}$ et $\varphi(0) = 0$. Ceci prouve que $[0\,;\mathrm{M}]$ est inclus dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices diagonalisables est étoilé donc connexe par arcs.}}$$

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A, B des compacts de E. Montrer que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est compact.

Corrigé : Soit $(x_n)_n \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\mathbb{N}}$. On a

$$\mathbb{N} = x^{-1}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = x^{-1}(\mathrm{A}) \cup x^{-1}(\mathrm{B})$$

donc un des deux ensembles est infini. Supposons $x^{-1}(\mathrm{A})$ infini. Il existe donc une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ est à valeurs dans le compact A. Par conséquent, il existe une autre extractrice ψ telle que $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ converge. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \text{ est compact.}}$$

Exercice 7 (*)

Soient E, F des evn et $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ des parties connexes par arc.

1. Montrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est connexe par arcs.
2. On suppose $\mathrm{E} = \mathrm{F}$. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est connexe par arcs.

Corrigé : 1. Soient $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, $(a', b') \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ et φ, ψ définies sur $[0\,;1]$ reliant continûment respectivement a à a' et b à b'. Par suite, l'application (φ, ψ) relie continûment (a, b) à (a', b') et est à valeurs dans $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ d'où

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A} \times \mathrm{B} \text{ est connexe par arcs.}}$$

2. L'application $f : \mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}, (x, y) \mapsto x + y$ est linéaire avec $\|f(x, y)\| \leqslant \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|_1$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ d'où sa continuité. L'ensemble produit E^2 est connexe par arcs et comme $\mathrm{A} + \mathrm{B} = f(\mathrm{E}^2)$ est l'image directe d'un connexe par arcs par une application continue, on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A} + \mathrm{B} \text{ est connexe par arcs.}}$$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, F un fermé et K un compact non vides et disjoints. On note

$$\mathrm{d}(\mathrm{K}, \mathrm{F}) = \operatorname*{Inf}_{(x,y)\in\mathrm{K}\times\mathrm{F}} \|x - y\|$$

Montrer $\mathrm{d}(\mathrm{F}, \mathrm{K}) > 0$.

Corrigé : Supposons $\mathrm{d}(\mathrm{K}, \mathrm{F}) = 0$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose de $(x_n, y_n)_n \in (\mathrm{K} \times \mathrm{F})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{d}(\mathrm{K}, \mathrm{F})$$

Par compacité de K, on dispose de φ extractrice telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Par suite, il vient

$$y_{\varphi(n)} = y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} = \mathrm{o}(1) + x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

La suite $(y_{\varphi(n)})_n$ convergente est à valeurs dans F. Par fermeture de F, on en déduit $x \in \mathrm{F}$ d'où $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{K}$ ce qui contredit le caractère $\mathrm{F} \cap \mathrm{K} = \varnothing$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{d(F,K)} > 0}$$

Variante : On a

$$\forall x \in \mathrm{K} \qquad \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = \operatorname*{Inf}_{y \in \mathrm{F}} \|x-y\| \geqslant \mathrm{d(K,F)} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{K}} \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) \geqslant \mathrm{d(K,F)}$$

Puis $$\forall (x,y) \in \mathrm{K} \times \mathrm{F} \qquad \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) \leqslant \|x-y\| \quad \Longrightarrow \quad \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{K}} \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) \leqslant \mathrm{d(K,F)}$$

Ainsi $$\operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{K}} \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = \mathrm{d(F,K)}$$

L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x,\mathrm{F})$ est 1-lipschitzienne donc continue. Comme K est compact, d'après le théorème des bornes atteintes, on obtient

$$\exists x \in \mathrm{K} \quad | \quad \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = \mathrm{d(K,F)} \quad \text{et} \quad x \notin \mathrm{F} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) > 0$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{d(F,K)} > 0}$$

Exercice 9 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que si $\mathrm{S}(0,1)$ est compacte, alors $\mathrm{B}_f(0,1)$ l'est aussi.

Corrigé : Soit $(x_n)_n \in \mathrm{B}_f(0,1)^{\mathbb{N}}$. Si la suite stationne à 0 à partir d'un certain rang, alors 0 est valeur d'adhérence. Dans le cas contraire, on peut supposer, quitte à extraire, que la suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans $(\mathrm{B}_f(0,1) \smallsetminus \{0\})^{\mathbb{N}}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

La suite $(y_n)_n$ est à valeurs dans le compact $\mathrm{S}(0,1)$. Ainsi, il existe φ extractrice telle que $(y_{\varphi(n)})_n$ converge vers un $y \in \mathrm{S}(0,1)$. Par ailleurs, la suite $\left(\|x_{\varphi(n)}\|\right)_n$ est à valeurs dans le compact $[\,0\,;1\,]$ et donc il existe une extractrice ψ telle que

$$\|x_{\varphi\circ\psi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in [\,0\,;1\,]$$

Il s'ensuit $$x_{\varphi\circ\psi(n)} = \|x_{\varphi\circ\psi(n)}\| y_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha y$$

On conclut $$\boxed{\text{Si } \mathrm{S}(0,1) \text{ est compacte, alors } \mathrm{B}_f(0,1) \text{ l'est aussi.}}$$

Exercice 10 (**)

Soient E, F des evn, $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts de E.

Montrer que $$f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{K}_n)$$

Corrigé : On suppose les compacts K_n non vides sinon le résultat est trivial. On a clairement $f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{K}_n)$. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{K}_n)$. Il existe $a_n \in \mathrm{K}_n$ pour tout n entier tel que $x = f(a_n)$. Comme $(a_n)_n \in \mathrm{K}_0^{\mathbb{N}}$, il existe une extractrice φ tel que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathrm{K}_0$. Par continuité, on a donc $x = f(a_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$. Montrons que $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$. Soit p entier. On a $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ d'où $\varphi(n) \geqslant p$ pour n assez grand donc $\left(a_{\varphi(n)}\right)_n$ à valeurs dans K_p pour n assez grand d'où $a \in \mathrm{K}_p$ par fermeture de K_p et ce pour tout p. On conclut

$$\boxed{f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{K}_n)}$$

Exercice 11 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}([\,0\,;2\pi\,],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte. On pourra considérer la suite $(f_n)_n$ avec $f_n : t \mapsto \cos(nt)$.

Corrigé : Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ avec $n \neq p$. On trouve

$$\|f_n - f_p\|_2 = \sqrt{2\pi} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = \sqrt{\pi}$$

Supposons qu'il existe φ extractrice telle que $\left(f_{\varphi(n)}\right)_n$ converge dans $\mathrm{B}_f(0,\sqrt{\pi})$. Alors

$$\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_2 = \sqrt{\pi} \leqslant \|f_{\varphi(n+1)} - f\|_2 + \|f - f_{\varphi(n)}\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui est absurde. On en déduit que $\mathrm{B}_f(0,\sqrt{\pi})$ n'est pas compacte et quitte à considérer la suite $(f_n/\sqrt{\pi})_n$, on conclut

$$\boxed{\text{La boule unité fermée de E n'est pas compacte.}}$$

Exercice 12 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, U un ouvert et K un compact avec $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{K} \qquad \mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{U}$$

Corrigé : Si K est vide, le résultat est immédiat. On suppose K non vide et on pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \varphi(x) = \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U})$$

C'est une application continue sur E car 1-lipschitzienne. Par conséquent, l'application φ atteint un minimum sur K en $a \in \mathrm{K}$ et comme $a \notin \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}$ fermé, il s'ensuit

$$\varphi(a) = \mathrm{d}(a, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) > 0$$

On pose $r = \varphi(a)$. Soit $x \in \mathrm{K}$, on a $\mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) \geqslant r$. Par conséquent, pour $y \notin \mathrm{U}$, on a

$$\mathrm{d}(x,y) \geqslant \inf_{z\notin \mathrm{U}} \mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) \geqslant r$$

ce qui prouve $\qquad \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U} \subset \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{B}(x,r)$

Par complémentation, on conclut

$$\boxed{\exists r > 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{K} \qquad \mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{U}}$$

Variante : Par l'absurde, supposons

$$\forall r > 0 \qquad \exists x \in \mathrm{K} \quad | \quad \mathrm{B}(x,r) \not\subset \mathrm{U}$$

d'où $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \exists x_n \in \mathrm{K} \quad | \quad \mathrm{B}(x_n, 1/n) \not\subset \mathrm{U}$

La suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans K compact d'où l'existence d'une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{B}(x_n, 1/n) \not\subset \mathrm{U}$ d'où l'existence de $y_n \in$

$\mathrm{B}(x_n, 1/n) \setminus \mathrm{U}$. On a $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Or, la suite $(y_n)_n$ est à valeurs dans $\mathrm{E} \setminus \mathrm{U}$ fermé d'où $x = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{U}$ ce qui contredit $x \in \mathrm{K} \subset \mathrm{U}$. Le résultat suit.

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie $n \geqslant 2$ ou infinie. Montrer que la sphère unité est connexe par arcs.

Corrigé : Soit $(a, b) \in \mathrm{S}(0,1)^2$ et $t \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$(1-t)a + tb = 0_{\mathrm{E}} \iff a = b \text{ ou } a = -b$$

car a et b sont normés. On suppose $a \neq -b$. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi(t) = \frac{(1-t)a+tb}{\|(1-t)a+tb\|}$$

L'application $t \mapsto (1-t)a + tb = a + t(b-a)$ est continue sur $[\,0\,;1\,]$ en tant qu'application $\|b-a\|$-lipschitzienne. Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a

$$(1-t)a + tb = 0_{\mathrm{E}} \iff (1-t)a = -tb \implies (1-t)\|a\| = t\|b\| \implies t = \frac{1}{2}$$

et on en déduit $a = -b$ ce qui est exclu. Ainsi, l'application $t \mapsto \dfrac{1}{\|(1-t)a+tb\|}$ est bien définie, continue sur $[\,0\,;1\,]$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Par conséquent, l'application φ est un chemin continu à valeurs dans $\mathrm{S}(0,1)$ tel que $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Si $a = -b$, il suffit d'intercaler un point intermédiaire ce qui est possible puisque $\dim \operatorname{Vect}(a, b) = 1 < \dim \mathrm{E}$ et on peut donc choisir $c \notin \operatorname{Vect}(a)$ normé. Ainsi

$$\boxed{\text{La sphère unité est connexe par arcs.}}$$

Remarque : En dimension 1, le résultat est faux puisqu'avec $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, on a $\mathrm{S}(0,1) = \{-1, 1\}$.

Exercice 14 (**)

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un point et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

Corrigé : On pose $\mathrm{X} = \{(x, y) \in \mathrm{I}^2 \mid x < y\}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathrm{X} \qquad \varphi(x, y) = f(x) - f(y)$$

L'ensemble X est clairement convexe donc connexe par arcs. L'application φ est continue car composée de fonctions continues. Par conséquent, l'ensemble $\varphi(\mathrm{X})$ est une partie de $\mathbb{R}$ connexe par arcs avec $0 \notin \varphi(\mathrm{X})$. C'est donc un intervalle inclus dans $]\,0\,;+\infty\,[$ ou dans $]\,-\infty\,;0\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement monotone.}}$$

Variante : On peut résoudre l'exercice de manière élémentaire. Si f n'est pas strictement monotone, il existe $(x_1, y_1) \in \mathrm{I}^2$ avec $x_1 < y_1$ et $f(x_1) \geqslant f(y_1)$ et $(x_2, y_2) \in \mathrm{I}^2$ avec $x_2 < y_2$ et $f(x_2) \leqslant f(y_2)$. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \psi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$$

L'application ψ est continue avec $\psi(0) \geqslant 0$ et $\psi(1) \leqslant 0$ d'où l'existence de $t_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\psi(t_0) = 0$. Notant $(x_0, y_0) = (1-t_0)(x_1, y_1) + t_0(x_2, y_2)$, on a $f(x_0) = f(y_0)$ avec $x_0 < y_0$ ce qui contredit l'injectivité de f.