ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 25/11/24

Préparation à l'interrogation n°10

1 Étude asymptotique

1. Équivalent en 1 de $x^\alpha - 1$;
2. Équivalent en 1 de $\ln(x)$;
3. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$;
4. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $f \underset{a}{\to} 0$ ou $f \underset{a}{\to} +\infty$, alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$. En effet, on a $g = f + \mathrm{o}(f) = f(1+\mathrm{o}(1))$ puis
$$\ln g = \underbrace{\ln f}_{\to\infty} + \underbrace{\ln(1+\mathrm{o}(1))}_{\to 0} = \ln f + \mathrm{o}(\ln f)$$
Le résultat suit.

2 Dérivation

Dérivée de f définie par
$$\forall t > 0 \qquad f(t) = t\sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

3 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

4 Inégalités de convexité/concavité

1. $\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t) \leqslant t$;
2. $\forall t > -1 \qquad \ln(1+t) \leqslant t$;
3. $\forall t \in \mathbb{R} \qquad 1+t \leqslant \mathrm{e}^t$;
4. $\forall u \geqslant -1 \qquad (1+u)^\alpha \geqslant 1+\alpha u \quad$ avec $\quad \alpha \geqslant 1$;
5. $\forall u \geqslant 0 \qquad 1-u^\alpha \leqslant \alpha(1-u) \quad$ avec $\quad \alpha \geqslant 1$.

5 Formules

1. Taylor reste intégral
2. $x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

6 Séries numériques

1. Encadrement du reste d'une série par comparaison série/intégrale ;
2. Critère de d'Alembert ;
3. Critère des séries alternées ;
4. Contrôle du reste d'une série alternée.

7 Exercice type

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \sqrt{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t$.

Corrigé : On définit la suite de fonctions continues par morceaux

$$\forall (n,t)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+ \qquad f_n(t)=\begin{cases}\sqrt{t}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t\in[\,0\,;n\,]\\ 0 & \text{si } t>n\end{cases}$$

Soit $t\geqslant 0$. Pour $n>t$, on a

$$f_n(t)=\sqrt{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\sqrt{t}\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}=\sqrt{t}\mathrm{e}^{n\left(-\frac{t}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t+\mathrm{o}(1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}$$

Et avec l'inégalité de concavité $\ln(1-u)\leqslant -u$ pour $u<1$, il vient

$$0\leqslant f_n(t)=\sqrt{t}\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\leqslant\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}$$

Posant $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}, t\mapsto\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}$, on a $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $f(t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées d'où l'intégrabilité de f qui est à la fois limite et dominante de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^n \sqrt{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty}\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

8 Exercice type

Sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(m+n)^3}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ (voir cours).

9 Exercice type

On pose $\qquad \forall n\in\mathbb{N}\qquad \forall x\in[\,0\,;1\,]\qquad f_n(x)=nx^n(1-x)$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Corrigé : On a $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$ (croissances comparées sur $]\,0\,;1\,[$) puis avec une étude de fonctions (à faire !)

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \|f_n\|_\infty=f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}^{-1}$$

Ainsi $\boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge simplement mais non uniformément vers la fonction nulle.}}$

10 Questions de cours

Familles sommables, suites de fonctions (début), graphes usuels.