Préparation à l'interrogation n°11

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;
3. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-1+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$.

2 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

3 Calcul intégral

1. Pour $\alpha > 0$ et $x > 0$, existence et valeur (si convergence) de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
2. Pour $\alpha > 0$, équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ pour $n \to +\infty$.

   On pourra observer $$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = n^{\alpha+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

4 Formules

1. Taylor reste intégral
2. $x^n - y^n = (x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

5 Séries numériques

1. Encadrement du reste d'une série par comparaison série/intégrale ;
2. Critère de d'Alembert ;
3. Critère des séries alternées ;
4. Contrôle du reste d'une série alternée.

6 Inégalités de convexité/concavité

1. $\forall t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \qquad \dfrac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t) \leqslant t$;
2. $\forall t > -1 \qquad \ln(1+t) \leqslant t$;
3. $\forall t \in \mathbb{R} \qquad 1+t \leqslant \mathrm{e}^t$;
4. $\forall u \geqslant -1 \qquad (1+u)^\alpha \geqslant 1+\alpha u \quad$ avec $\quad \alpha \geqslant 1$;
5. $\forall u \geqslant 0 \qquad 1-u^\alpha \leqslant \alpha(1-u) \quad$ avec $\quad \alpha \geqslant 1$.

7 Probabilités

1. Soit X variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$. On a $\mathbb{P}(\mathrm{X}=1)=p$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)=1-p$, $\mathbb{E}(\mathrm{X})=p$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})=p(1-p)$;
2. Soit X variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n entier et $p \in [0;1]$. Pour $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p, les variables X et $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ ont même loi. Par linéarité de l'espérance, il s'ensuit $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\mathrm{X}_i)=np$ et par indépendance, on a $\mathbb{V}(\mathrm{X})=\mathbb{V}(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{V}(\mathrm{X}_i)=np(1-p)$.

8 Exercice type

Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t$ pour $n\to+\infty$.

Corrigé : On pose $u=t^n$ et on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u$$

On a $\quad \forall (n,u)\in\mathbb{N}^*\times[0;1] \qquad 0\leqslant u^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+u}\leqslant\sqrt{2} \quad$ et $\quad u^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+u}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{1+u}$

La dominante $u\mapsto\sqrt{2}$ est intégrable sur le segment $[0;1]$ et par convergence dominée

$$\int_0^1 u^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{I}_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}\int_0^1\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u}$$

9 Exercice type

Continuité de $\zeta :]1;+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$ (voir cours).

10 Exercice type

Pour $\mathrm{S}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+x)^2}$ avec $x>0$, équivalent de $\mathrm{S}(x)$ pour $x\to+\infty$ (voir cours).

11 Questions de cours

Séries de fonctions, approximation, graphes usuels.