TD ONDES ELECTROMAGNETIQUES I

Exercice 1* : CARACTERISTIQUES D'UNE ONDE

On étudie l'onde électromagnétique de champ électrique

$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$ avec $E_x = E_0 \exp(i(\omega t - k(2x+2y+z)/3))$.

Cette onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6.10^{-7}$m.

1) Déterminer la direction de propagation de l'onde, son vecteur d'onde, sa longueur d'onde, sa fréquence. A quel domaine du spectre appartient cette onde électromagnétique ?
2) Donner l'équation d'une surface d'onde.
3) Exprimer E_y.
4) Quelle est l'état de polarisation de cette onde électromagnétique ?
5) Exprimer le champ magnétique de cette onde.
6) Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.

Exercice 2* : OPPM ASSOCIEE A UN FAISCEAU LASER

Un faisceau laser émet une onde plane monochromatique, polarisée rectilignement suivant Oz, qui se propage dans le plan xOy suivant une direction Ox' inclinée de 60° par rapport à l'axe Ox. Le milieu de propagation a les propriétés électromagnétiques du vide.
1) Ecrire les composantes du vecteur d'onde, du champ électrique, du champ magnétique et du vecteur de Poynting.
2) Calculer leurs normes dans le cas d'un laser à Argon ionisé (λ_o=488nm) qui émet en continu un faisceau cylindrique de 1mm^2 de section et de puissance moyenne 1W.

Exercice 3♥ :** OEM DANS LE VIDE

On étudie l'onde électromagnétique de champ électrique en notation complexe :

$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_y\vec{e}_y + \underline{E}_z\vec{e}_z$ avec $\underline{E}_y = E_0.\cos(\pi y/a).\exp(i(\omega t - k_0 z))$ et $\underline{E}_z = \underline{\alpha}E_0.\sin(\pi y/a).\exp(i(\omega t - k_0 z))$

où $\underline{\alpha}$ est complexe et k_0 positif.
Cette onde se propage dans le vide.

1) Déterminer $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de ω, a et c.
2) Exprimer le champ magnétique de cette onde.
3) Cette onde est-elle plane ? progressive ? monochromatique ? transverse électrique ? transverse magnétique ?

Exercice 4♥ :** VITESSE DE L'ENERGIE D'UNE ONDE DANS UN CABLE COAXIAL

On considère un câble coaxial de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2, d'axe Oz. Une onde électromagnétique se propage dans l'espace entre les armatures qui a les propriétés électromagnétiques du vide. En coordonnées cylindriques, le champ électrique de l'onde est de la forme :
$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r e^{j(\omega t - kz)}$ avec $E(R_1) = E_o$.
On utilisera les opérateurs d'analyse vectorielle en coordonnées cylindriques donnés page suivante.

1) En écrivant que le champ électromagnétique doit vérifier les équations de Maxwell, exprimer le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de E_0, R_1, k, ω, r, t et des vecteurs de base des coordonnées cylindriques. En déduire aussi la relation de dispersion.
2) Exprimer la moyenne sur le temps du vecteur de Poynting et la puissance moyenne transportée par l'onde.
3) Calculer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique. En déduire la vitesse moyenne de propagation de l'énergie.

On donne les opérateurs d'analyse vectorielle en coordonnées cylindriques :

$$\vec{grad}(V) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} \qquad \vec{rot}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_r}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Laplacien scalaire : $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Laplacien vecteur : $\vec{\Delta}\vec{a} = \begin{vmatrix} \Delta a_r - \dfrac{a_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta a_\theta - \dfrac{a_\theta}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \\ \Delta a_z \end{vmatrix}$

Réponses :

Ex 2 : 1) $\vec{k} = \frac{k_0}{2}(\vec{e_x} + \sqrt{3}\vec{e_y})$ $\quad \vec{E} = E_m \cos\left(\omega t - \frac{k_0}{2}(x + \sqrt{3}y)\right)\vec{e_z}$

$\vec{B} = \frac{E_m}{2c}\cos\left(\omega t - \frac{k_0}{2}(x + \sqrt{3}y)\right)(-\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_x})$

$\vec{R} = \varepsilon_0 E_m^2 c \cos^2\left(\omega t - \frac{k_0}{2}(x + \sqrt{3}y)\right)(\vec{e_x} + \sqrt{3}\vec{e_y})$

2) $E_m = 3.10^4\ V.m^{-1}$ $\quad B_m = 9.10^{-5}\ T$ $\quad R_m = 2.10^6\ W.m^{-2}$ $\quad k = 1{,}3.10^7 m^{-1}$

Ex 3 : 1) $\underline{\alpha} = i\pi/\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$ $\quad k_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$

2) $\vec{B} = -\frac{\omega}{k_0 c^2} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{i(\omega t - k_0 z)}\vec{e_x}$

3) *Transverse magnétique mais pas transverse électrique*

Ex 4 : 1) $\vec{E} = \frac{R_1}{r} E_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{u_r}$ $\quad \vec{B} = \frac{k}{\omega}\frac{R_1}{r} E_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{u_\theta}$ $\quad k = \omega/c$

2) $\langle\vec{R}\rangle = \frac{E_0^2 R_1^2}{2\mu_0 c r^2}\vec{u_z}$ $\quad P = \frac{E_0^2 R_1^2 \pi}{\mu_0 c} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

3) $c\vec{u_z}$