ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Programme de colles

⚠ Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 11 09/12/24 - 13/12/24

Programme :

Suites et séries de fonctions :
- Convergence simple d'une suite de fonctions ;
- Théorème de convergence dominée, théorème d'intégration terme à terme ;
- Convergence uniforme, la convergence uniforme implique la convergence simple, interprétation de la convergence uniforme avec la norme infinie ;
- Limite uniforme d'une suite de fonctions continues, cas d'une limite uniforme sur tout segment, théorème de la double limite ;
- Intégrale fonction de la borne supérieure pour une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, intégrale sur un segment d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément ;
- Suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ convergeant simplement et dont la suite des fonctions dérivées convergent uniformément sur tout segment, extension au cas d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.
- Extension des résultats énoncés ci-avant aux séries de fonctions ;
- Convergence normale, la convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point ;
- Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier, théorème de Weierstrass.

Séries entières (début, cours uniquement) :
- Définition, lemme d'Abel, rayon de convergence, intervalle ouvert et disque ouvert de convergence, mode de convergence dans le disque ouvert de convergence et hors de l'adhérence de ce disque, utilisation de la règle de d'Alembert, convergence normale sur tout disque fermé centré en 0 de rayon $r < \mathrm{R}$, continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence ;
- Pour $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, comparaison des rayons si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou $a_n \sim b_n$;
- Somme de séries entières, même rayon pour $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$, série entière dérivée, intégrée, produit de Cauchy de séries entières.

Questions de cours : (avec preuve)

1. Caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions avec le reste ;
2. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point ;
3. Convergence uniforme de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$;
4. Trois stratégies pour nier la convergence uniforme de $\sum \dfrac{1}{n^2x+1}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\zeta(2)}{x}$ par double limite ;
6. Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$;
7. Approximation uniforme de fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier ;
8. Théorème de Weierstrass ;
9. Lemme d'Abel, mode de convergence pour $|z| > \mathrm{R}$ et $|z| < \mathrm{R}$ et son corollaire ;
10. Si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\ell}$;
11. Convergence normale sur tout disque $\mathrm{D}_f(0,r)$ avec $r < \mathrm{R}$ et continuité de la somme ;
12. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon, application aux séries entières dérivées et intégrées ;
13. Produit de Cauchy de séries entières.