ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 09/12/24

Préparation à l'interrogation n°12

1 Étude asymptotique

1. Équivalent en 1 de $x^\alpha - 1$;
2. Équivalent en 1 de $\ln(x)$;
3. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $f \underset{a}{\to} 0$ ou $f \underset{a}{\to} +\infty$, alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$. En effet, on a $g = f + \mathrm{o}(f) = f(1+\mathrm{o}(1))$ puis
$$\ln g = \underbrace{\ln f}_{\to\infty} + \underbrace{\ln(1+\mathrm{o}(1))}_{\to 0} = \ln f + \mathrm{o}(\ln f)$$
Le résultat suit.

2 Trigonométrie

Soient a, b, θ réels et $n \in \mathbb{Z}$.

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
2. $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$;
3. $\sin(n\pi) = 0$;
4. $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ (IPP) ;
2. $\displaystyle\int^x \cos(t)^{2n+1}\mathrm{d}t = \int^x (1-\sin(t)^2)^n \cos(t)\mathrm{d}t \underbrace{=}_{u=\sin(t)} \int^{\sin(x)} (1-u^2)^n \mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2k+1}$

4 Formules

1. Inégalité de Taylor-Lagrange
2. $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha^k$ avec $|\alpha| < 1$

5 Séries numériques

1. Encadrement du reste d'une série par comparaison série/intégrale ;
2. Critère de d'Alembert ;
3. Critère des séries alternées ;
4. Contrôle du reste d'une série alternée.

6 Inégalités de convexité/concavité

1. $\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t) \leqslant t$;
2. $\forall t > -1 \qquad \ln(1+t) \leqslant t$;
3. $\forall t \in \mathbb{R} \qquad 1+t \leqslant \mathrm{e}^t$;
4. $\forall u \geqslant -1 \qquad (1+u)^\alpha \geqslant 1+\alpha u \quad$ avec $\quad \alpha \geqslant 1$;
5. $\forall u \geqslant 0 \qquad 1-u^\alpha \leqslant \alpha(1-u) \quad$ avec $\quad \alpha \geqslant 1$.

7 Dérivation

Dérivée de f définie par $\forall t > 0 \qquad f(t) = t \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$

8 Probabilités

1. Soit X variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [\,0\,;1\,]$. On a $\mathbb{P}(\mathrm{X}=1) = p$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=0) = 1-p$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = p$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = p(1-p)$;
2. Soit X variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n entier et $p \in [\,0\,;1\,]$. Pour $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p, les variables X et $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ ont même loi. Par linéarité de l'espérance, il s'ensuit $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_i) = np$ et par indépendance, on a $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{V}(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_i) = np(1-p)$.

9 Exercice type

Rayon de convergence de $\sum a^n z^n$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ (voir cours).

10 Exercice type

Continuité de la fonction somme sur $]\,-1\,;1\,]$ (<u>fermé</u> en 1) de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ (voir cours).

11 Exercice type

Montrer que $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur un intervalle à préciser et donner son développement.

Corrigé : On a $\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

Par intégration de série entière, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \ln(1+x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}$$

12 Questions de cours

Séries entières, graphes usuels.