SÉRIES ENTIÈRES

B. Landelle

Table des matières

I Convergence d'une série entière

1 Définitions

Définition 1. *On appelle* série entière *de la variable complexe z toute série de terme général $a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est une suite complexe. On la note $\sum a_n z^n$.*

Exemples : 1. $\sum z^n$, $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $\sum z^{2n+1}$, $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1 (Lemme d'Abel). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $z_0 \neq 0$. Si la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors pour tout z complexe tel que $|z| \in [\,0\,; |z_0|\,[$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \mathrm{O}(1) \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

La série $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est géométrique convergente car $0 < \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$. Le résultat suit. □

Définition 2. *On appelle* rayon de convergence *de la série entière $\sum a_n z^n$ la quantité R définie par*

$$\mathrm{R} = \mathrm{Sup}\,\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_n \textit{ bornée }\}$$

Le rayon de convergence R est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Remarques : 1. L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ bornée }\}$ est non vide puisqu'il contient nécessairement zéro.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant n_0} a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exemples : 1. Pour $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n z^n$ série entière polynomiale, le rayon de convergence est $\mathrm{R} = +\infty$.

2. La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$. Pour $r \geqslant 0$, on a

$$(r^n)_n \text{ bornée } \iff r \leqslant 1$$

D'où $$\{r \geqslant 0, (r^n)_n \text{ bornée }\} = \{r \geqslant 0,\ r \leqslant 1\} = [\,0\,;1\,]$$

Le résultat suit. Plus généralement, pour $a \in \mathbb{C}^*$, la série entière $\sum a^n z^n$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = 1/|a|$ puisque

$$a^n r^n = \mathrm{O}(1) \iff |ar| \leqslant 1 \iff r \in [\,0\,;1/|a|\,]$$

3. La série entière $\sum n z^n$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$. Par croissances comparées, on a pour $r \geqslant 0$

$$(nr^n)_n \text{ bornée } \iff r < 1$$

d'où $$\{r \geqslant 0, (nr^n)_n \text{ bornée}\} = \{r \geqslant 0, r < 1\} = [\,0\,;1\,[$$

Passant à la borne supérieure, le résultat suit.

4. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = +\infty$. Pour $r > 0$, notons $u_n = \frac{r^n}{n!}$ et utilisons le critère de d'Alembert. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{r^n} = \frac{r}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

On en déduit que $\sum \frac{r^n}{n!}$ converge pour tout $r \geqslant 0$ d'où $\left(\frac{r^n}{n!}\right)_n$ de limite nulle donc bornée pour tout $r \geqslant 0$ d'où $\mathrm{R} = +\infty$.

Définition 3. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $\mathrm{R} > 0$*. On appelle* intervalle de convergence *de* $\sum a_n z^n$ *l'intervalle ouvert* $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$ *et on appelle* disque ouvert de convergence *l'ensemble* $\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < \mathrm{R}\}$.

Exemple : 1. L'intervalle de convergence de $\sum z^n$ est $]-1\,;1\,[$.

2. L'intervalle de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $]-\infty\,;+\infty\,[$.

2 Modes de convergence

Théorème 2. *Soit* $\sum a_n z^n$ *série entière de rayon de convergence* R.

1. *Si* $|z| > \mathrm{R}$, *la suite* $(a_n z^n)$ *n'est pas bornée et* $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement ;*
2. *Si* $0 \leqslant |z| < \mathrm{R}$, *la série* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente.*

Démonstration. 1. Immédiat par définition de R.
2. Soit $r_0 \in\,]\,|z|\,;\mathrm{R}\,[$. Ainsi, la suite $(a_n r_0^n)_n$ est bornée et d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. □

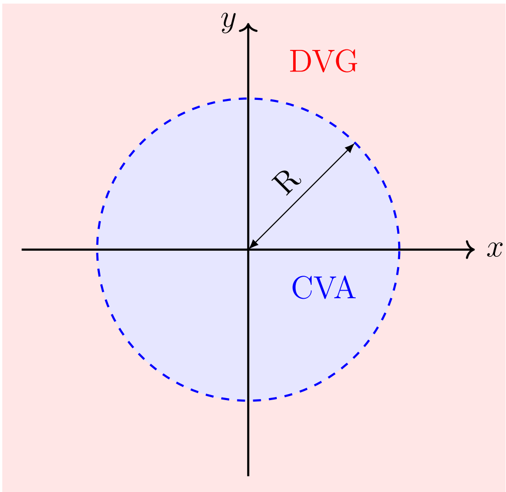

Figure 1 – Disque ouvert de convergence

Remarque : Le cercle $\mathcal{C}(0,\mathrm{R}) = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = \mathrm{R}\}$ est parfois appelé *cercle d'incertitude.*

Corollaire 1. *Soit* $\sum a_n z^n$ *série entière de rayon de convergence* R *et* $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. *Si* $\sum a_n z_0^n$ *converge, alors* $|z_0| \leqslant \mathrm{R}$ *;*
2. *Si* $\sum a_n z_0^n$ *diverge, alors* $|z_0| \geqslant \mathrm{R}$.

Démonstration. 1. Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $\sum a_n z_0^n$ ne diverge pas grossièrement d'où $|z_0| \leqslant \mathrm{R}$.
2. Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $\sum a_n z_0^n$ ne converge pas absolument (puisque la convergence absolue implique la convergence) d'où $|z_0| \geqslant \mathrm{R}$. □

Exemple : Pour la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$, la convergence en $z = -1$ et la divergence en $z = 1$ permettent d'en déduire $\mathrm{R} = 1$. Ceci illustre également l'incertitude sur le cercle $\mathcal{C}(0, \mathrm{R})$.

Théorème 3. *Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R avec $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, alors $\mathrm{R} = \frac{1}{\ell}$ avec la convention $\mathrm{R} = 0$ si $\ell = +\infty$ et $\mathrm{R} = +\infty$ si $\ell = 0$.*

Démonstration. Soit $r > 0$. On utilise les résultats du corollaire 1 sur la série $\sum a_n r^n$. On pose $u_n = |a_n| r^n$ pour n entier. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| r \xrightarrow[n\to\infty]{} r\ell$$

D'après le critère de d'Alembert, on a :

— Si $\ell = 0$, alors la série converge (absolument) donc $\mathrm{R} \geqslant r$ et ceci a lieu pour tout $r > 0$ d'où $\mathrm{R} = +\infty$;

— Si $\ell = +\infty$, alors la série diverge (grossièrement) d'où $r \geqslant \mathrm{R}$ et ceci a lieu pour tout $r > 0$ donc $\mathrm{R} = 0$;

— Si $\ell \in]\,0\,; +\infty\,[$: si $\ell r > 1$, la série diverge (grossièrement) donc

$$r > 1/\ell \quad \Longrightarrow \quad r \geqslant \mathrm{R}$$

donc $\mathrm{R} \leqslant 1/\ell$ et si $\ell r < 1$, la série converge (absolument) d'où $\mathrm{R} \geqslant 1/\ell$; on conclut

$$\mathrm{R} = 1/\ell$$

□

Compléments : Pour une série lacunaire du type $\sum a_n z^{pn+q}$ (p entier non nul et $q \in [\![\, 0\,; p-1 \,]\!]$) avec $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on procède de même en posant $u_n = |a_n| r^{pn+q}$ pour $r > 0$.

Supposons
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

ainsi
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| r^p \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell r^p$$

D'après le critère de d'Alembert et le corollaire 1, on obtient :

— Si $\ell = 0$, alors $\mathrm{R} = +\infty$;

— Si $\ell = +\infty$, alors $\mathrm{R} = 0$;

— Si $\ell \in]\,0\,; +\infty\,[$: si $\ell r^p > 1$, la série diverge (grossièrement) donc

$$r > 1/\ell^{1/p} \quad \Longrightarrow \quad r \geqslant \mathrm{R}$$

donc $\mathrm{R} \leqslant 1/\ell^{1/p}$; si $\ell r^p < 1$, la série converge (absolument) d'où $\mathrm{R} \geqslant 1/\ell^{1/p}$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{R} = 1/\ell^{1/p}}$$

⚠ Dans les deux configurations présentées ci-avant, on distingue strictement les cas pour invoquer le critère de d'Alembert puis on conclut largement sur R qui est une borne supérieure.

Exemple : $\sum \dfrac{z^{2n}}{\sqrt{n}2^n}$. Pour $r > 0$, on pose $u_n = \dfrac{r^{2n}}{\sqrt{n}2^n}$. On trouve

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{r^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r^2}{2}$$

- si $\dfrac{r^2}{2} < 1 \iff r < \sqrt{2}$, alors $\sum \dfrac{r^{2n}}{2^n}$ converge absolument d'où $\mathrm{R} \geqslant \sqrt{2}$.
- si $\dfrac{r^2}{2} > 1 \iff r > \sqrt{2}$, alors $\sum \dfrac{z^{2n}}{2^n}$ diverge grossièrement d'où $\mathrm{R} \leqslant \sqrt{2}$.

Théorème 4. *Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. La série entière converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 de rayon $r < \mathrm{R}$.*

Démonstration. Soit $\mathrm{D}_f(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leqslant r\}$ avec $r < \mathrm{R}$. Par propriété de $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{B}(\mathrm{D}_f(0,r),\mathbb{C})$, on a

$$\operatorname*{Sup}_{z\in \mathrm{D}_f(0,r)} |a_n z^n| = |a_n|\, r^n$$

La série $\sum a_n r^n$ converge absolument et le résultat suit par comparaison. □

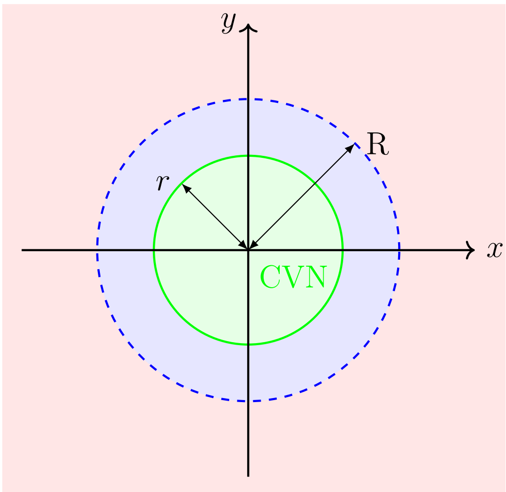

Figure 2 – Convergence normale sur $\mathrm{D}_f(0,r)$ pour $r < \mathrm{R}$

⚠ **Avertissement :** Il n'y a pas en général convergence normale sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Il suffit de considérer l'exemple de la série entière $\sum z^n$.

Corollaire 2. *La somme d'une série entière de rayon de converge $\mathrm{R} > 0$ est continue sur son disque ouvert de convergence.*

Démonstration. La série entière $\sum a_n z^n$ est une série de fonctions $z \mapsto a_n z^n$ continues sur $\mathbb{C}$ (polynomiales) qui converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 de rayon de $r < \mathrm{R}$. Ainsi, la somme est continue sur tout disque fermé de centre 0 de rayon $r < \mathrm{R}$ et donc sur le disque ouvert $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. □

Exemple : On a $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$. On a $S \in \mathscr{C}(D(0,1), \mathbb{C})$ ce qu'on sait par ailleurs puisqu'il s'agit d'une fonction rationnelle. On peut remarquer que la quantité $\dfrac{1}{1-z}$ est bien définie pour $z = -1$ mais qu'on ne peut pas substituer z par -1 dans $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ puisque la série associée y serait grossièrement divergente.

3 Propriétés

Proposition 1. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum (-1)^n a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

Démonstration. Soit $r \geqslant 0$. On a

$$(a_n r^n)_n \text{ bornée } \iff ((-1)^n a_n r^n)_n \text{ bornée } \iff (\lambda a_n r^n)_n \text{ bornée}$$

et le résultat suit. □

Proposition 2. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2. Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_1 \geqslant R_2$.*

Démonstration. Si $R_2 = 0$, c'est immédiat. Supposons $R_2 > 0$. Soit $r \in [\,0\,; R_2\,[$. On a

$$a_n r^n = O(b_n r^n) = O(1)$$

Ainsi $$r < R_2 \implies r \leqslant R_1$$

autrement dit $$[\,0\,; R_2\,[\subset [\,0\,; R_1\,]$$

Passant à la borne supérieure, on obtient $R_2 \leqslant R_1$. □

Remarque : Si $R = +\infty$, la notation $[\,0\,; R\,]$ désigne simplement $\mathbb{R}_+$.

Exemples : 1. $\sum z^n$ et $\sum 2^n z^n$.

2. $\sum z^n$, $\sum \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \right) z^n$, $\sum n z^n$.

Proposition 3. *Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ des suites complexes. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

Démonstration. On a $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et le résultat suit. □

Exemple : Rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$. On a

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left[n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = \exp\left[n^2\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n-\frac{1}{2}}$$

Il s'ensuit que $R = e$.

II Opérations sur les séries entières

1 Somme de séries entières

Proposition 4. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2. Le rayon de convergence R de $\sum (a_n+b_n)z^n$ vérifie $\mathrm{R} \geqslant \min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)$ avec égalité si $\mathrm{R}_1 \neq \mathrm{R}_2$ et*

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Démonstration. Pour $r \in [\,0\,;\min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)\,[$ (si $\min = 0$, il n'y a rien à faire), on a

$$a_n r^n = \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad b_n r^n = \mathrm{O}(1) \quad \Longrightarrow \quad (a_n+b_n)r^n = \mathrm{O}(1)$$

d'où $$r \in [\,0\,;\min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)\,[\quad \Longrightarrow \quad r \in [\,0\,;\mathrm{R}\,]$$

autrement dit $[\,0\,;\min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)\,[\;\subset\; [\,0\,;\mathrm{R}\,]$ et passant à la borne supérieure, il s'ensuit $\mathrm{R} \geqslant \min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)$. Par linéarité de Σ car convergence (absolue), on a

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Supposons $\mathrm{R}_1 \neq \mathrm{R}_2$, par exemple $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2$ et soit $r \in \,]\,\mathrm{R}_1\,;\mathrm{R}_2\,[$. Si $r < \mathrm{R}$, on a

$$(a_n+b_n)r^n = \mathrm{O}(1) \quad \Longrightarrow \quad (a_n+b_n-b_n)r^n = a_n r^n = \mathrm{O}(1)$$

ce qui implique $r < \mathrm{R}_1$ et qui est absurde d'où $r \geqslant \mathrm{R}$ autrement dit, avec un argument de symétrie de rôle, pour $\mathrm{R}_1 \neq \mathrm{R}_2$

$$r > \min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2) \quad \Longrightarrow \quad r \geqslant \mathrm{R}$$

c'est-à-dire $]\min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)\,;+\infty\,[\; \subset [\,\mathrm{R}\,;+\infty\,[$ et passant à la borne inférieure, on trouve $\min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2) \geqslant \mathrm{R}$ ce qui prouve l'égalité si $\mathrm{R}_1 \neq \mathrm{R}_2$. □

Remarque : Si $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2$, on ne peut dire mieux (prendre $a_n = -b_n = 1$ puis $a_n = b_n = 1$).

2 Séries entières dérivées, intégrées

Théorème 5. *Les séries entières $\sum a_n z^n$ $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

Démonstration. Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_2 celui de $\sum n a_n z^n$. Comme $|a_n| \leqslant n\,|a_n|$ pour $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R}_2$. Considérons ensuite $r \in [\,0\,;\mathrm{R}_1\,[$ (si $\mathrm{R}_1 = 0$, il n'y a rien de plus à faire). Soit $\lambda \in \,]\,r\,;\mathrm{R}_1\,[$. On a

$$n a_n r^n = \underbrace{a_n \lambda^n}_{=\mathrm{O}(1)} \times \underbrace{n\left(\frac{r}{\lambda}\right)^n}_{=\mathrm{o}(1)} = \mathrm{o}(1) = \mathrm{O}(1)$$

d'où $$r \in [\,0\,;\mathrm{R}_1\,[\quad \Longrightarrow \quad r \in [\,0\,;\mathrm{R}_2\,]$$

Ainsi, on a $\mathrm{R}_1 \leqslant \mathrm{R}_2$ et on en déduit l'égalité $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2$. □

Corollaire 3. *Les séries entières $\sum a_n z^n$ $\sum\limits_{(n\geqslant 1)} n^k a_n z^n$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ont même rayon de convergence.*

Démonstration. Notons R_k le rayon de convergence de la série $\sum n^k a_n z^n$ pour $k \in \mathbb{N}$. On a $\sum n^{k+1} a_n z^n = \sum n \times n^k a_n z^n$ d'où l'égalité $\mathrm{R}_k = \mathrm{R}_{k+1}$ d'après le théorème précédent. Ainsi, la suite $(\mathrm{R}_k)_k$ est constante. On procède à l'identique en notant R_{-k} rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^{-k} a_n z^n$ pour $k \in \mathbb{N}$. □

Définition 4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle série entière dérivée première la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, série dérivée k-ième la série $\sum\limits_{n \geqslant k} \dfrac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k} = \sum \dfrac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n$.*

Corollaire 4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Toutes ses séries dérivées ont même rayon de convergence R.*

Démonstration. Soit $r \geqslant 0$, on a clairement

$$(n a_n r^n)_n \text{ bornée } \iff (n a_n r^{n-1})_{n \geqslant 1} \text{ bornée}$$

Ainsi, avec le résultat du théorème 5, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence. Par récurrence immédiate, on en déduit que toutes les séries dérivées ont ce même rayon de convergence. □

Remarque : Soit $(u, v) \in \mathrm{D}_f(0, r)^2$ avec $r \in [\,0\,; \mathrm{R}\,[$. On a

$$\mathrm{S}(u) - \mathrm{S}(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (u^n - v^n) = (u - v) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k}$$

D'où
$$|\mathrm{S}(u) - \mathrm{S}(v)| \leqslant |u - v| \sum_{n=1}^{+\infty} n\, |a_n|\, r^{n-1}$$

puisque la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. Ainsi, S est lipschitzienne sur tout disque fermé inclus dans $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ donc sur tout compact inclus dans $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.

Corollaire 5. *Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.*

Démonstration. Conséquence du corollaire précédent. □

3 Produit de Cauchy de séries entières

Théorème 6 (Produit de Cauchy de séries entières). *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2. Alors le rayon de convergence R de $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ vérifie $\mathrm{R} \geqslant \min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ et*

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, \min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Démonstration. On suppose $\min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) > 0$ (sinon il n'y a rien à faire). Soit $r \in [\,0\,; \min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)\,[$. On a $\sum a_n r^n$ et $\sum b_n r^n$ absolument convergentes d'où, par théorème sur le produit de Cauchy, la série $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k r^k b_{n-k} r^{n_k} \right) = \sum c_n r^n$ converge absolument donc $r \leqslant \mathrm{R}$ d'après le corollaire 1. Il s'ensuit que $\mathrm{R} \geqslant \min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$. Puis, pour $z \in \mathrm{D}(0, \min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2))$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ absolument convergentes d'où par théorème sur le produit de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

□

Remarque : On peut avoir $\mathrm{R} > \min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ avec $\dfrac{1}{1-z} \times (1-z)$ ou $\mathrm{R} = \min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ avec $1 \times \dfrac{1}{1-z}$.

III Somme d'une série entière d'une variable réelle

1 Continuité, Abel radial

Théorème 7. *Soit $\sum a_n x^n$ série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et soit S sa* somme*, i.e.*

$$\forall x \in \,]-\mathrm{R}\,; \mathrm{R}\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]-\mathrm{R}\,; \mathrm{R}\,[$ et la somme S est continue sur $]-\mathrm{R}\,; \mathrm{R}\,[$.

Démonstration. Spécialisation des résultats énoncés dans $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. □

Exemples : 1. $\sum x^n$ a pour rayon $\mathrm{R} = 1$.

2. $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$ d'où la continuité de S sur $]-1\,; 1\,[$. Peut-on étendre ce résultat aux bornes ? En $x = -1$, la série diverge. En $x = 1$, la série converge car vérifie le critère des séries alternées. Il s'agit donc d'une série de fonctions continues sur $[\,0\,; 1\,]$ qui converge uniformément puisque, d'après le théorème sur le reste des séries alternées, on a

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,; 1\,] \qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On conclut que la somme S est continue sur $[\,0\,; 1\,]$ donc sur $]-1\,; 1\,]$. En fait, ce comportement au bord est plus général comme l'illustre le résultat suivant.

Théorème 8 (Théorème d'Abel radial). *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} \in \,]\,0\,; +\infty\,[$. On suppose que $\sum a_n \mathrm{R}^n$ converge. Alors, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to \mathrm{R}]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n$$

Démonstration. On note $\rho_{\mathrm{N}} = \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n$ pour N entier. On a pour $x \in [\,0\,; \mathrm{R}\,[$ et N entier

$$\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n = \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} (\rho_n - \rho_{n+1}) \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n$$

Les séries $\sum \rho_n \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n$ et $\sum \rho_{n+1} \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n$ convergent (leurs termes généraux sont des o $\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n$) et par linéarité du symbole somme, on effectue la transformation d'Abel

$$\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \rho_n \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n - \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \rho_n \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{n-1} = \rho_{\mathrm{N}} \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{\mathrm{N}} + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \rho_n \left[\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n - \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{n-1}\right]$$

Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de n_0 entier tel que $|\rho_n| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Ainsi, pour $\mathrm{N} \geqslant n_0$

$$\forall x \in [\,0\,;\mathrm{R}\,[\qquad \left|\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} a_n x^n\right| \leqslant \varepsilon + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \varepsilon \left[\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n\right] \leqslant \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^{\mathrm{N}} \leqslant 2\varepsilon$$

Par conséquent, la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[\,0\,;\mathrm{R}\,[$. D'après le théorème de double limite, on conclut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to \mathrm{R}]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n$$

□

Remarque : Le résultat dit finalement que la somme S est continue en R. On pourrait aussi observer qu'on a la convergence uniforme sur $[\,0\,;\mathrm{R}\,]$ de la série de fonctions continues sur $[\,0\,;\mathrm{R}\,]$.

Exemple : On retrouve $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \xrightarrow[x \to 1]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

2 Intégration

Théorème 9. *Soit $\sum a_n x^n$ série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Alors*

$$\forall x \in \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Démonstration. Notons $u_n : t \mapsto a_n t^n$ pour $(n, t) \in \mathbb{N} \times \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Pour une série entière, on a convergence normale donc uniforme sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Ainsi, pour $x \in \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$, la série $\sum u_n$ est une série de fonctions continues sur $[\,0\,;x\,]$ (ou $[\,x\,;0\,]$) qui converge uniformément sur $[\,0\,;x\,]$ (ou $[\,x\,;0\,]$) d'où

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\, \mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x u_n(t)\, \mathrm{d}t$$

□

Exemple : On a

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad -\ln(1+x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^x t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Pour $x = 1$, on a vu que le résultat se prolongeait et on retrouve l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

3 Dérivation

Théorème 10. *Soit* $\sum a_n x^n$ *série entière d'une variable réelle de rayon de convergence* $\mathrm{R} > 0$.

Soit S *sa somme, i.e.* $\qquad \forall x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Alors S *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ *et pour tout* k *entier*

$$\forall x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[\qquad \mathrm{S}^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

En particulier $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \dfrac{\mathrm{S}^{(n)}(0)}{n!}$

Démonstration. Notons $u_n : x \mapsto a_n x^n$ pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$. D'après le corollaire 4, la série entière $\sum a_n x^n$ et ses séries entières dérivées $\sum_{n \geqslant k} \dfrac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ ont même rayon de convergence. Pour une série entière, on a convergence normale donc uniforme sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Pour k entier, la série $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ telle que $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment dans $\left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$. Comme ceci vaut pour tout k entier, la fonction somme S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on a $\mathrm{S}^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ pour tout k entier. $\square$

Exemple : $\qquad \forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$

IV Développement en série entière

1 Série de Taylor

Dans ce qui suit, A désigne une partie de $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 5. *Soit* $f : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ *et* $r > 0$. *On dit que* f *est* développable en série entière *sur* $\mathrm{D}(0, r) \subset \mathrm{A}$ *s'il existe une série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* $\mathrm{R} \geqslant r$ *telle que*

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, r) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

La série $\sum a_n z^n$ *est* <u>*le*</u> développement en série entière *de* f *sur* $\mathrm{D}(0, r)$.

Définition 6. *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ *et* $r > 0$. *On dit que* f *est* développable en série entière *sur* $\left]-r\,;r\right[\subset \mathrm{I}$ *s'il existe une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $\mathrm{R} \geqslant r$ *tels que*

$$\forall x \in \left]-r\,;r\right[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

La série $\sum a_n x^n$ *est* <u>*le*</u> développement en série entière *de* f *sur* $\left]-r\,;r\right[$.

Exemples : 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$.

2. La fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ est développable en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$.

Définition 7. *Soit $r > 0$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec $]-r\,;r[\subset \mathrm{I}$. La série* $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ *est appelée* série de Taylor de f en zéro.

Théorème 11. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ et $r > 0$. Si f est développable en série entière sur $]-r\,;r[$, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$ et*

$$\forall x \in \,]-r\,;r[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème 10. En effet, la fonction somme définie sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$ coïncide avec f sur $]-r\,;r[$ et par conséquent, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$ et les coefficients de la série entière sont déterminés par la formule annoncée. □

⚠ **Remarque :** Le caractère $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$ n'implique pas être développable en série entière. Considérons la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

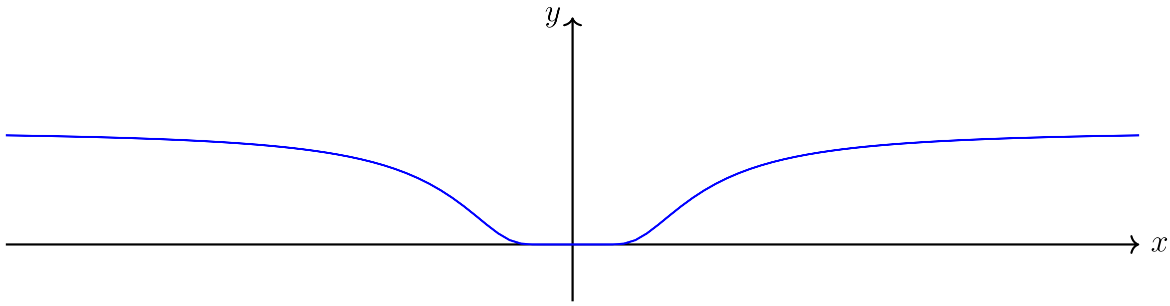

FIGURE 3 – Graphe de f, fonction plate en 0

Par récurrence, on montre que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{x^{3n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$$

Ainsi
$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 \neq f$$

Théorème 12 (Unicité du développement en série entière). *Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières d'une variable réelle de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 non nuls. Soit $\alpha \in \,]0\,;\min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)]$ avec*

$$\forall x \in \,]0\,;\alpha[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Alors $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = b_n$

Démonstration. On note $\rho = \min(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)$ et on pose

$$\forall x \in \,]-\rho\,;\rho[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n)\,x^n$$

Par linéarité (car convergence), on a pour $\alpha \in]\,0\,;\rho\,[$

$$\forall x \in]\,0\,;\alpha\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 0$$

La fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\rho\,;\rho\,[$ d'où les dérivées en 0 à tout ordre sont en particulier les dérivées à droite. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n - b_n = \frac{\mathrm{S}^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\mathrm{S}^{(n)}(0^+)}{n!} = 0$$

□

Proposition 5. *Soit $r > 0$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ développable en série entière sur $]-r\,;r\,[\subset \mathrm{I}$ et notons $\sum a_n x^n$ son développement en série entière sur $]-r\,;r\,[$.*

1. *Si f est paire, alors $a_{2n+1} = 0$ pour tout n entier.*
2. *Si f est impaire, alors $a_{2n} = 0$ pour tout n entier*

Démonstration. Il suffit d'écrire pour tout $f(x) - f(-x) = 0$ pour f paire et $f(x) + f(-x) = 0$ pour f impaire avec $x \in]-r\,;r\,[$ et d'invoquer l'unicité du développement en série entière. □

2 Développements en série entière usuels

$$\begin{array}{rrcl}
\forall x \in]-1\,;1\,[& \dfrac{1}{1-x} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
\forall x \in]-1\,;1\,[& \ln(1-x) & = & -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
\forall x \in]-1\,;1\,[& (1+x)^\alpha & = & 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \\
\forall x \in \mathbb{R} & \mathrm{e}^x & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\forall x \in \mathbb{R} & \mathrm{ch}\,(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\forall x \in \mathbb{R} & \mathrm{sh}\,(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\forall x \in \mathbb{R} & \cos(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\forall x \in \mathbb{R} & \sin(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{array}$$

Le premier développement en série entière est le résultat d'une somme géométrique convergente. Celui de $\ln(1-x)$ s'obtient par intégration d'une série entière. Pour celui de exp, ch, cos, … on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \mathrm{e}^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

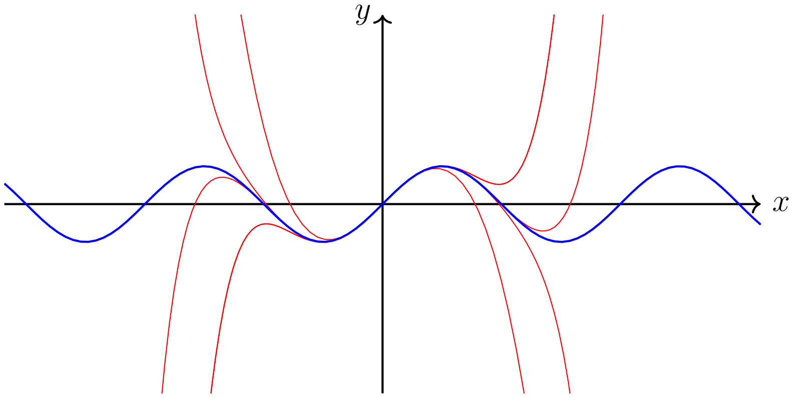

Figure 4 – Graphe de sin et de sommes partielles de son développement en série entières

Détails de ces développements : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left[(1+x)^\alpha\right] = \alpha\times(\alpha-1)\times\ldots\times(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$,
Le coefficient $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ est parfois noté $\binom{\alpha}{n}$ ce qui fournit l'écriture « naturelle » $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$.
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\mathrm{e}^x\right] = \mathrm{e}^x$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left[\cos(x)\right] = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, etc. ...
Pour $(1+x)^\alpha$, le reste de Taylor est $\mathrm{R}_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t$ et

$$\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

et $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$. En effet, pour $x\in[\,0\,;1\,[$, on a $|x-t| = x-t \leqslant x \leqslant x+tx = |x|\,|1+t|$ et pour $x\in\,]-1\,;0\,]$, on a $|x-t| = t-x \leqslant (-x)t-x = |x|\,|1+t|$. Puis, le critère de d'Alembert permet d'obtenir

$$\frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}\,|x|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Le résultat suit.

Application : Détermination du développement en série entière de Arctan x. On a

$$\forall x\in\,]-1\,;1\,[\qquad \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} 0 + \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\operatorname{Arctan} t\right]\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

3 Exponentielle complexe

Proposition 6. *La série entière* $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ *a pour rayon de convergence* $\mathrm{R} = +\infty$.

Remarque : En particulier, on a $z^n = \mathrm{o}(n!)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$ par convergence de la série exponentielle.

Définition 8. *La série entière* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *est appelée* série exponentielle *de la variable complexe* z. *Sa somme est appelée* exponentielle complexe *et notée* e^z *ou* $\exp(z)$, *i.e.*

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Remarque : Pour $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Il s'agit donc d'un prolongement de l'exponentielle réelle à $\mathbb{C}$.

Proposition 7.
1. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad \mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{e}^z \neq 0$ *et* $\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$

Démonstration. 1. Les séries $\sum \frac{z_1^n}{n!}$ et $\sum \frac{z_2^n}{n!}$ convergent absolument. D'après le théorème sur le produit de Cauchy (pour séries numériques), on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n$$

D'où l'égalité annoncée.
2. On a $\mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^0 = 1$ et le résultat suit.

3. Par linéarité $\qquad \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!}\right] = \mathrm{e}^x\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n y^n\right]$

avec $a_n = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $b_n = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}^{n-1}}{n!} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, la convergence ayant lieu avec pour tout n entier $|a_n| \leqslant \frac{1}{n!}$ et $|b_n| \leqslant \frac{1}{n!}$. Le résultat suit. $\square$

V Méthodes pratiques

1 Calcul d'une fonction somme et d'une somme numérique

Soit $\sum a_n x^n$ série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$. Pour le calcul explicite de $\mathrm{S}(x)$, on utilise les techniques suivantes pour faire apparaître des séries usuelles :

- la linéarité si $\mathrm{S}(x) = \mathrm{A}(x) + \mathrm{B}(x)$,
- la dérivation $\mathrm{S}'(x)$, l'intégration $\int_0^x \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$
- la transformation $\mathrm{S}(x) = \begin{cases} \mathrm{S}(\sqrt{x}^2) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{S}(-\sqrt{-x}^2) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Pour le calcul d'une somme numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$, on considère la série entière $\sum a_n x^n$ en s'assurant d'avoir $r \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$.

Exemple : Convergence et somme de $\sum \dfrac{n}{2^n}$. On a

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ainsi, en $x = \dfrac{1}{2}$, la série converge et on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2$$

2 Développement en série entière d'une fonction donnée

Soit f fonction dont on cherche le développement en série entière. Pour faire apparaître des fonctions sommes de séries entières usuelles, on peut :

- transformer f (factorisation, somme géométrique, logarithme de produit, décomposition en éléments simples etc. ...) ;
- intégrer, dériver f ;
- passer en écriture complexe (si présence d'exponentielles) ;
- résoudre un problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} a(t)x' + b(t)x = c(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

  avec a, b polynomiales et c développable en série entière.

Exemple : La fonction exp est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x' - x = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

Remarque : En réalité, cet exemple est essentiellement pédagogique et artificiellement simple puisque l'existence de l'exponentielle comme solution d'un problème de Cauchy n'a pas été prouvée dans le cadre des programmes du lycée. Et pour démontrer le théorème de Cauchy linéaire à l'ordre un, le plus simple est d'utiliser la fonction exponentielle ...