ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 19/12/2024

Devoir en temps libre n°9

Problème I

1. Soit $x > 0$. Démontrer que $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

   On pose $$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que pour $x > 0$, on a $\Gamma(x) > 0$.
3. Montrer que Γ est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.
4. Pour $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$. Montrer que $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n$.

   On pose $$\forall x > 0 \qquad \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

5. Pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$, on définit $f_n :]\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}$ par
   $$\forall t > 0 \qquad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]\,0\,;n\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Établir $$\forall x < 1 \qquad \ln(1-x) \leqslant -x$$
   En déduire $$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x > 0 \quad \forall t > 0 \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$$

   (b) Montrer $$\forall x > 0 \qquad \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)$$

6. On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{I}_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u$$

   (a) Après avoir justifié l'existence de $\mathrm{I}_n(x)$, déterminer pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$ une relation entre $\mathrm{I}_n(x)$ et $\mathrm{I}_{n-1}(x+1)$.

   (b) En déduire pour n entier et $x > 0$ une expression de $\mathrm{I}_n(x)$.

   (c) Montrer $$\forall x > 0 \qquad \frac{n!n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)$$

7. Établir $$\forall n \geqslant 1 \qquad \forall x > 0 \qquad \frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{k}\right) = \mathrm{e}^{x\mathrm{H}_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1 + \frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]$$

   En déduire $$\forall x > 0 \qquad x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1 + \frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\Gamma(x)}$$

8. (a) En déduire que $\sum_{k\geqslant 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

On pose $\qquad \forall x>0 \qquad g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$

(b) Montrer que $g\in\mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

(c) En déduire $\qquad \forall x>0 \qquad \Psi(x)=-\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$

9. Que vaut $\Psi(1)$? En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$.

Problème II

Pour p et n entiers, on note $\mathrm{S}_{p,n}$ le nombre de sujections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

1. Établir $\qquad \forall(n,p)\in\mathbb{N}^2 \qquad n^p=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{S}_{p,k}$

2. Soit p entier et R le rayon de convergence de $\sum\frac{\mathrm{S}_{p,n}}{n!}z^n$. Justifier $\mathrm{R}=+\infty$.

3. Déterminer une expression sommatoire de $\mathrm{S}_{p,n}$ pour p et n entiers.

Problème III (bonus)

On définit la suite de fonctions $(\mathrm{S_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall \mathrm{N}\in\mathbb{N} \qquad \forall x\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z} \qquad \mathrm{S_N}(x)=\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}}\frac{1}{x+n}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{2x}{x^2-n^2}$$

1. Montrer l'égalité annoncée en préambule et en déduire que la suite de fonctions $(\mathrm{S_N})_\mathrm{N}$ converge simplement sur $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$.
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.
4. Montrer $\qquad \forall x\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{S}\left(\frac{x+1}{2}\right)=2\mathrm{S}(x)$
5. Montrer que la fonction $f:x\mapsto\pi\,\mathrm{cotan}\,(\pi x)-\mathrm{S}(x)$ vérifie la même relation.
6. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. En déduire S.
7. Établir $\qquad \forall x\in\,]\,0\,;1\,[\qquad \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)=\ln\pi+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$
8. En déduire une écriture de $\sin(\pi x)$ sous forme de produit infini de pour $x\in[\,0\,;1\,[$.
9. En utilisant le résultat de la question 6.(c) du problème I, conclure en montrant la *formule des compléments*

$$\forall x\in\,]\,0\,;1\,[\qquad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=\frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$