ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°48

Exercice 1 (***)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$$

1. Montrer que S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$ puis un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Déterminer une écriture intégrale de $\mathrm{S}(x)$ pour $x > 0$.
4. En déduire le comportement de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 0$.

Corrigé : 1. On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. On a

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k} k! n^k}{(1+nx)^{k+1}}$$

Pour $x > 0$ et k entier fixés, on pose

$$\forall u > 0 \qquad \varphi(u) = \frac{u^k}{(1+ux)^{k+1}}$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et par dérivation

$$\forall u > 0 \qquad \varphi'(u) = \frac{u^{k-1}(1+ux)^k\,[k(1+ux) - (k+1)xu]}{(1+ux)^{2(k+1)}} = \frac{u^{k-1}(1+ux)^k\,[k - xu]}{(1+ux)^{k+2}}$$

On en déduit que φ décroît sur $\left[\dfrac{k}{x}\,;+\infty\right[$ et par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ vérifie le critère des séries alternées à partir d'un certain rang. Ainsi par contrôle du reste d'une série alternée, on obtient pour n assez grand ($n \geqslant \dfrac{k}{a}$ assure la décroissance car on aura $\dfrac{k}{a} \geqslant \dfrac{k}{x}$)

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times [\,a\,;+\infty\,[\qquad \left|\mathrm{R}_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{k!(n+1)^k}{(1+(n+1)x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!(n+1)^k}{(1+(n+1)a)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

On en déduit la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ sur tout segment et comme ceci vaut pour tout k entier, les conditions du théorème de classe $\mathscr{C}^k$ pour une série de fonctions sont satisfaites à tout ordre d'où

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^\infty(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad v_n(x) = \frac{(-1)^n x}{1+nx}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ vérifie le critère des séries alternées d'où, par contrôle du reste

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{x}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On en déduit la convergence uniforme sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ et comme on a

$$v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{(-1)^n}{n}$$

on obtient, par théorème de la double limite

$$x\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{x}}$$

3. Soit $x > 0$ et N entier non nul. On a

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{1+nx} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \int_0^1 (-t^x)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (-t^x)^n\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-t^x}{1+t^x} \,\mathrm{d}t + (-1)^{\mathrm{N}} \int_0^1 \frac{(t^x)^{\mathrm{N}+1}}{1+t^x} \,\mathrm{d}t$$

Or
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(t^x)^{\mathrm{N}+1}}{1+t^x} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (t^x)^{\mathrm{N}+1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x(\mathrm{N}+1)} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \int_0^1 \frac{-t^x}{1+t^x} \,\mathrm{d}t}$$

4. On pose
$$\forall (x,t) \in [\,0\,;+\infty\,[\times \,]\,0\,;1\,] \qquad f(x,t) = \frac{-t^x}{1+t^x}$$

Pour $x \geqslant 0$, on a $t \mapsto f(x,t)$ continue sur $]\,0\,;1\,]$ et pour $t \in \,]\,0\,;1\,]$, $x \mapsto f(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$ par théorèmes généraux. Enfin

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \,]\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant |f(x,t)| \leqslant 1$$

et la dominante $t \mapsto 1$ est clairement intégrable sur $]\,0\,;1\,]$. Par continuité sous l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}}$$

Exercice 2 (***)

On pose
$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et dérivabilité de S.
2. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

Corrigé : 1. On pose
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$$

Les fonctions u_n sont définies au plus sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour $|x| > 1$, on a

$$\frac{x^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{-x^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

et pour $|x|<1$ $$\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$$
d'où la convergence absolue de la série. On en déduit

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie sur }]-1\,;1\,[.}$$

Soit $a \in [\,0\,;1\,[$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,-a\,;a\,] \qquad \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{1-|x|} \leqslant \frac{a^n}{1-a}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}(]-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]-1\,;1\,[\qquad u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

Soit $a \in [\,0\,;1\,[$. Il vient

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,-a\,;a\,] \qquad |u_n'(x)| \leqslant \frac{na^{n-1}}{(1-a)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]-1\,;1\,[$ et par théorème, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^1(]-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. Soit $x \in]\,0\,;1\,[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{1-x^t}$ est continue par morceaux sur $[\,1\,;+\infty\,[$, décroissante, positive. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ donc convergente. Par comparaison série/intégrale, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) = \frac{x}{1-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \frac{x}{1-x} + \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$$

avec $$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(1-x^t)}{\ln x}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

d'où $$\frac{\ln(1-x)}{\ln x} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

Enfin, on constate $$\frac{x}{x-1} \underset{x\to 1^-}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right)$$

D'où $$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}}$$

Variantes : (a) Si on reconnaît pas de dérivée dans l'expression $\dfrac{x^t}{1-x^t}$ avec $t \geqslant 1$, on peut utiliser le changement de variables $u = x^t$. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1-u}$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1-u} = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

(b) Pour la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ avec $x \in \left]0\,;1\right[$, on peut remarquer

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} x^t \sum_{n=0}^{+\infty} x^{nt}\,\mathrm{d}t$$

Or, la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} x^{(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln x}$ converge et par intégration terme à terme, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln x} = -\frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels deux à deux distincts. Construire une fonction discontinue en les a_n.

Corrigé : On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{\mathbb{1}_{[\,a_n\,;+\infty\,[}(x)}{2^n} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Soit n_0 entier. On a
$$f = f_{n_0} + \sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} f_n$$

Pour $n \neq n_0$, les f_n sont continues en a_{n_0}. Par convergence normale et donc uniforme puisque $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{2^n}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\neq n_0} f_n$ continues en a_{n_0}, la somme $\displaystyle\sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} f_n$ est continue en a_{n_0} et comme f_{n_0} ne l'est pas, la fonction f est discontinue en a_{n_0}. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[\,a_n\,;+\infty\,[}(x)}{2^n} \text{ est discontinue en les } a_n.}$$

Remarque : En particulier, notant $\mathbb{Q} = \{r_n, n \in \mathbb{N}\}$ puisque l'ensemble des rationnels est dénombrable, on peut construire une fonction discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. En revanche, on ne peut construire une fonction continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$. L'ensemble des points de continuité d'une fonction est un G_δ, *i.e.* une intersection dénombrable d'ouverts, ce que n'est pas $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 (***)

On pose
$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan} n]$$

1. Montrer que S est $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer une relation entre $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{S}(x+1)$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan} n$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[$

$$|u_n(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t \in]\,n\,;n+x\,[} \frac{1}{1+t^2}\,|x+n-n| = \frac{x}{1+n^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série définissant S est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ convergeant simplement sur $\mathbb{R}_+$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \qquad u_n'(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \|u_n'\|_\infty = \frac{1}{1+n^2}$$

D'après le critère de Riemann, on a convergence normale de $\sum u_n'$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})}$$

2. Par linéarité du symbole somme, on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\operatorname{Arctan}(x+n+1) - \operatorname{Arctan}(x+n)]$$

Par téléscopage, on obtient

D'où $$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x}$$

3. Par téléscopage, avec la propriété fondamentale d'Arctan, on trouve

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} [\mathrm{S}(k+1) - \mathrm{S}(k)] = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} k\right] = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Par sommation de relation de comparaison avec $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

Ainsi $$\mathrm{S}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

Enfin, par croissance de S, on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor + 1) \geqslant \mathrm{S}(x) \geqslant \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)$$

et $$\ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

ce qui implique $$\ln(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x \quad \text{et} \quad \ln(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x}$$

Exercice 5 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels deux à deux distincts. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-a_n|}{2^n\,(1+|a_n|)}$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de F.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \qquad f_n(x) = \dfrac{|x-a_n|}{2^n(1+|a_n|)}$

Soit $\alpha \geqslant 0$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,-\alpha\,;\alpha\,] \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n(1+|a_n|)}\,(|x|+|a_n|) \leqslant \frac{\alpha+1}{2^n}$$

On en déduit que la série de fonctions continues $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[\,-\alpha\,;\alpha\,]$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. Pour n entier, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{a_n\}$. Soit $x_0 \in \mathrm{A} = \mathbb{R} \smallsetminus \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f_n'(x_0) & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n'(x_0) = \dfrac{\varepsilon_n}{2^n(1+|a_n|)} \quad$ avec $\quad \varepsilon_n \in \{-1,1\}$

Les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et par inégalité triangulaire inverse

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad \|g_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Par convergence normale et donc uniforme, il vient

$$\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x_0)$$

Ainsi, la fonction F est dérivable sur A. Soit n_0 entier. On considère

$$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{a_{n_0}\} \qquad \tau(x) = \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a_{n_0})}{x-a_{n_0}} = \frac{f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a_{n_0})}{x-a_{n_0}} + \sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} g_n(x)$$

avec les fonctions g_n définies comme précédemment en remplaçant x_0 par a_{n_0}. Pour les même raisons que précédemment, la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 0,\ n\neq n_0} g_n$ converge normalement et il vient

$$\sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow[x\to a_{n_0}]{} \sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} g_n(a_{n_0})$$

Enfin, le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a_{n_0})}{x-a_{n_0}}$ n'admet pas de limite pour $x \to a_{n_0}$ et par conséquent la fonction τ non plus. On conclut

$$\boxed{\text{Le domaine de dérivabilité de F est } \mathbb{R} \smallsetminus \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}.}$$

Remarque : Si on ne pense pas à prolonger par continuité la fonction g_n en $x_0 \in \mathrm{A}$ pour n entier, on peut procéder avec le théorème de double limite par les mêmes arguments que ci-avant.

Exercice 6 (****)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3}$$

Étudier la définition et la continuité de S.

Corrigé : On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3}$$

Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R}$. On a $$\frac{na-1}{n^3} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3} \leqslant \frac{nb}{n^3}$$

d'où $\|u_n\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve la converge normale et donc uniforme sur tout segment de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$. Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ et par conséquent, la somme S est également continue sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. Plus précisément, les fonctions u_n sont continues à droite sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par double limite, on a également S continue à droite sur $\mathbb{R}$ donc en particulier continue à droite sur $\mathbb{Q}$. Il reste à examiner la continuité à gauche sur les points de $\mathbb{Q}$. Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$ avec $x_0 = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$. On a

$$\mathrm{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n^3} = \sum_{n=1,q|n}^{+\infty} \frac{nx_0}{n^3} + \sum_{n=1,q\nmid n}^{+\infty} \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n^3}$$

Puis, si $q|n$, on a $\lfloor nx \rfloor \xrightarrow[x\to x_0^-]{} nx_0 - 1$ et si $q \nmid n$, $\lfloor nx \rfloor \xrightarrow[x\to x_0^-]{} \lfloor nx_0 \rfloor$. Ainsi, par double limite, il vient

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1,q|n}^{+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3} + \sum_{n=1,q\nmid n}^{+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3} \xrightarrow[x\to x_0^-]{} \sum_{n=1,q|n}^{+\infty} \frac{nx_0 - 1}{n^3} + \sum_{n=1,q\nmid n}^{+\infty} \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n^3}$$

d'où $$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to x_0^-]{} \mathrm{S}(x_0) - \sum_{n=1,q|n}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \mathrm{S}(x_0) - \frac{\zeta(3)}{q^3}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction S est définie, continue à droite sur } \mathbb{R}\text{, continue sur } \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} \text{ et discontinue à gauche sur } \mathbb{Q}.}$$

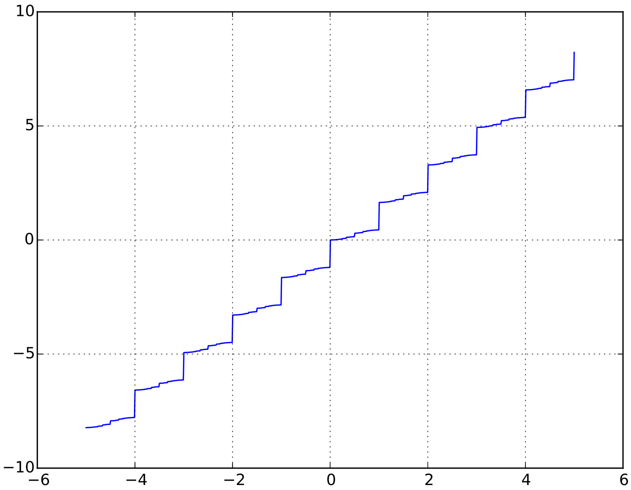

Figure 1 – Graphe de la fonction S

Remarque : Avec la discontinuité croissante de la fonction $x \mapsto \dfrac{\lfloor qx \rfloor}{q^3}$ en x_0 et la croissance des autres fonctions, on obtient la discontinuité à gauche en tout rationnel (mais sans la valeur du saut de discontinuité).