ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°46

Exercice 1 (*)

Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Exercice 2 (*)

Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \frac{nx}{n^4 + x^2}$$

Exercice 3 (*)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 4 (*)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{x+k} \right)$$

1. Montrer que S est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer une relation entre $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{S}(x+1)$ pour $x > 0$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to +\infty$ et $x \to 0$.

Exercice 5 (*)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 6 (**)

On pose $$\forall x > 1 \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$.
2. Préciser la monotonie et convexité de la fonction ζ.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\zeta(x)$ pour $x \to 1^+$.
5. Étudier la convexité de $\ln \circ \zeta$.

Exercice 7 (**)

Calculer pour $n \in \mathbb{Z}$
$$\mathrm{I}_n = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta}}{1 - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

Exercice 8 (**)

On pose
$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathrm{th}\,(x+n) - \mathrm{th}\;n]$$

1. Montrer que S est définie, continue, croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ pour $x \geqslant 0$.
3. Étudier la convergence de S en $+\infty$.

Exercice 9 (**)

On pose
$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f(x) = \begin{cases} -8x & \text{si } x \in \left[\,0\,;\dfrac{1}{8}\right] \\ 8x-2 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{8}\,;\dfrac{1}{4}\right] \\ 0 & \end{cases} \qquad \text{et} \quad \varphi(x) = 2x-1$$

puis
$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f \circ \varphi^n(x)$$

où $\varphi^n = \varphi \circ \ldots \varphi$.

1. Montrer que S est bien définie, continue sur $[\,0\,;1\,]$.
2. Pour une fonction continue sur un segment, l'ensemble des points où elle atteint sa borne supérieure est-elle une réunion finie d'intervalles disjoints ?