ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°47

Exercice 1 (***)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que η est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 2 (***)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$$

1. Étudier le mode de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de la somme $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$ et $x \to 0$.

Exercice 3 (***)

On pose $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f.
2. Déterminer un équivalent de f en 1^-.

Exercice 4 (***)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 5 (***)

Soit $f_0 \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{R})$. On construit $(f_n)_n$ en posant $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$.

Étudier et évaluer la fonction $g : x \in [\,a\,;b\,] \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Exercice 6 (***)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$$

1. Justifier que S est bien définie et continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$.

Exercice 7 (***)

On pose $\forall x > -1 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right]$

1. Montrer que S est définie, continue sur $\mathrm{I} =]-1\,; +\infty[$.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$.
4. Calculer $\mathrm{S}(n)$ pour n entier.
5. En déduire un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.

Exercice 8 (***)

Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,; 1\,] \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{1+nx}$$

Déterminer un équivalent de la somme en 1.

Exercice 9 (****)

On pose $\forall n \geqslant 2 \qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montre que $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
4. La fonction somme $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n$ est-elle dérivable à droite en 0^+ ?