ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°48

Exercice 1 (***)

On pose
$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$$

1. Montrer que S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$ puis un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Déterminer une écriture intégrale de $\mathrm{S}(x)$ pour $x > 0$.
4. En déduire le comportement de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 0$.

Indications : 1. Considérer
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}$$
et établir que pour k entier, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ vérifie le critère des séries alternées à partir d'un certain rang.
2. Considérer une série auxiliaire et utiliser le théorème de double limite.
3. Déterminer une écriture intégrale de $\dfrac{1}{1+nx}$ pour n entier et $x > 0$ puis considérer une somme partielle de $\mathrm{S}(x)$.

Exercice 2 (***)

On pose
$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et dérivabilité de S.
2. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

Indications : 1. Pour la continuité et la dérivabilité, étudier la convergence normale sur $[\,-a\,;a\,]$ avec $a \in [\,0\,;1\,[$.
2. Procéder par comparaison série/intégrale.

Exercice 3 (***)

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels deux à deux distincts. Construire une fonction discontinue en les a_n.

Indications : Considérer
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{\mathbb{1}_{[\,a_n\,;+\infty\,[}(x)}{2^n} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Exercice 4 (***)

On pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathrm{Arctan}\,(x+n) - \mathrm{Arctan}\, n]$

1. Montrer que S est $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer une relation entre $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{S}(x+1)$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.

Indications : 1. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour la convergence simple.
2. Observer un téléscopage.
3. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(n)$ pour $n \to +\infty$ puis exploiter la monotonie de S pour conclure sur $\mathrm{S}(x)$ avec $x \to +\infty$.

Exercice 5 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels deux à deux distincts. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-a_n|}{2^n\,(1+|a_n|)}$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de F.

Indications : 1. Établir la convergence normale de la série de fonctions sur tout segment $[\,-\alpha\,;\alpha\,]$ avec $\alpha \geqslant 0$.

2. Poser $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f_n'(x_0) & \text{sinon} \end{cases}$

puis étudier $\dfrac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0}$ pour $x \to x_0$. Pour l'étude en un point a_{n_0} avec n_0 entier, isoler le terme associé dans l'écriture du taux d'accroissement.

Exercice 6 (****)

On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3}$

Étudier la définition et la continuité de S.

Indications : Établir la convergence normale sur tout segment, la continuité sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ puis la continuité à droite sur $\mathbb{R}$ à l'aide du théorème de double limite. Pour la continuité à gauche en un point $x_0 \in \mathbb{Q}$ avec $x_0 = \dfrac{p}{q}$ sous forme irréductible, couper la somme définissant $\mathrm{S}(x_0)$ en deux sommes, une avec les indices n tels que $q|n$ et l'autre avec les indices n tels que $q \nmid n$ puis utiliser la double limite.