ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°34

Exercice 1 (*)

En considérant la dérivée n-ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Corrigé : Notons $f(x) = x^n$ pour x réel. Un récurrence immédiate donne

$$\forall k \in [\![0 \,;\, n]\!] \qquad f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Par dérivation en considérant directement f^2 puis $f \times f$ avec la formule de Leibniz, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(f^2\right)^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \left(f^2\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$

D'où $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(f^2\right)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k = n! x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Par identification $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

Remarque : C'est un cas particulier de la formule de Vandermonde.

Exercice 2 (*)

Déterminer $$\lim_{n \to +\infty} \int_n^{n+1} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \, \mathrm{d}t$$

Corrigé : Notons $\mathrm{F}(x) = \int_1^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) \, \mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 1$. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists c_n \in \,]\, n \,;\, n+1 \,[\quad | \quad \mathrm{F}(n+1) - \mathrm{F}(n) = (n+1-n)\mathrm{F}'(c_n) = \sin\left(\frac{1}{c_n}\right)$$

Ainsi $$\boxed{\int_n^{n+1} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$$

Exercice 3 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k \, |x - y|^\alpha$$

avec $k > 0$ et $\alpha > 1$.

Corrigé : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ distincts. Il vient

$$\left\|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right\| \leqslant k \, |x - y|^{\alpha - 1}$$

Fixant x et faisant $y \to x$, il s'ensuit que f est dérivable en tout point x avec $f'(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Il s'ensuit que f est constante. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions constantes sont les solutions.}}$$

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ diagonalisable. On définit le *rayon spectral* de A noté $\rho(\mathrm{A})$ par

$$\rho(\mathrm{A}) = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} |\lambda|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(\mathrm{A})$ pour avoir $\sum \mathrm{A}^k$ convergente.

Corrigé : On dispose de $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Ainsi, pour N entier

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}^k = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} (\mathrm{PDP}^{-1})^k = \mathrm{P}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}^k\right)\mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}^k = \operatorname{diag}(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \lambda_n^k)$$

Si $\rho(\mathrm{A}) < 1$, alors $\sum \lambda_i^k$ converge pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$ et par continuité du produit matriciel, la série $\sum \mathrm{A}^k$ converge. Réciproquement, supposons $\sum \mathrm{A}^k$ convergente, avec l'égalité

$$\operatorname{diag}(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \lambda_n^k) = \mathrm{P}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}^k\right)\mathrm{P}$$

pour N entier, on a par continuité du produit matriciel la convergence de $\sum \mathrm{D}^k$ et donc des séries coordonnées $\sum \lambda_i^k$ d'où $\rho(\mathrm{A}) < 1$. On conclut

$$\boxed{\sum \mathrm{A}^k \text{ converge} \iff \rho(\mathrm{A}) < 1}$$

Exercice 5 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer

$$\forall n \geqslant 1 \quad \exists 0 < x_1 < \ldots < x_n < 1 \mid \sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = n$$

Corrigé : En appliquant le théorème des accroissements finis sur $\left[\dfrac{k-1}{n}\,; \dfrac{k}{n}\right]$ pour $k \in [\![1\,; n]\!]$, il vient

$$\forall k \in [\![1\,; n]\!] \qquad \exists x_k \in \left]\frac{k-1}{n}\,; \frac{k}{n}\right[\quad \mid \quad f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} f'(x_k)$$

D'où
$$\sum_{k=1}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] = f(1) - (0) = 1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \exists 0 < x_1 < \ldots < x_n < 1 \quad \mid \quad \sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = n}$$

Exercice 6 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le *rayon spectral* d'une matrice noté ρ par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \rho(\mathrm{A}) = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} |\lambda|$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Montrer que pour toute norme d'opérateur sur E, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \rho(\mathrm{A}) \leqslant \|\mathrm{A}^p\|_{\mathrm{op}}^{1/p}$$

Corrigé : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$ tels que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$. Pour p entier non nul, on a $\mathrm{A}^p\mathrm{X} = \lambda^p \mathrm{X}$ d'où

$$|\lambda^p|\,\|\mathrm{X}\| = \|\mathrm{A}^p\mathrm{X}\| \leqslant \|\mathrm{A}^p\|_{\mathrm{op}}\|\mathrm{X}\|$$

et comme $\|\mathrm{X}\| \neq 0$, il s'ensuit

$$|\lambda|^p \leqslant \|\mathrm{A}^p\|_{\mathrm{op}}$$

On conclut $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \rho(\mathrm{A}) \leqslant \|\mathrm{A}^p\|_{\mathrm{op}}^{1/p}}$

Exercice 7 (**)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Soit $f : t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}^2)$ avec $\|f(t)\| = 1$ pour tout $t \in \mathrm{I}$ et $g : t \mapsto (-y(t), x(t))$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ tel que

$$f' = \gamma g \quad \text{et} \quad g' = -\gamma f$$

Corrigé : On a $\langle f, f\rangle = 1$ d'où par dérivation $2\langle f', f\rangle = 0$. Comme on a $\langle f, g\rangle = 0$, on en déduit que $f' \in \operatorname{Vect}(g)$ d'où $f' = \gamma g$ avec $\gamma = \langle f', g\rangle \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. En procédant de même avec $\|g, g\| = 1$, on trouve $g' = \delta f$. Puis, en dérivant la relation $\langle f, g\rangle = 0$, on obtient

$$\langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle = \gamma + \delta = 0$$

On conclut $\boxed{\exists \gamma \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \quad | \quad f' = \gamma g \quad \text{et} \quad g' = -\gamma f}$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ dérivable en zéro et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que f est linéaire.

Corrigé : Pour $x = 0$, il vient $f(0) = 0_{\mathrm{E}}$. En remplaçant x par $x/2$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Par récurrence immédiate $\quad \forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \qquad f(x) = 2^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$

D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$f(0 + h) = f(0) + f'(0)h + \mathrm{o}(h)$$

Comme $\dfrac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il s'ensuit

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f'(0)\frac{x}{2^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f'(0)x + \mathrm{o}(1)$$

Ainsi $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f'(0)x$

$\boxed{\text{Les applications vérifiant la relation fonctionnelle sont les } x \mapsto \alpha x \text{ avec } \alpha \text{ réel.}}$

Exercice 9 (**)

1. Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall p \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!] \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^n = (-1)^n n!$$

   Indication : on pourra considérer $\varphi(x) = (1 - \mathrm{e}^x)^n$ pour x réel.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Calculer $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(hk)$.

Corrigé : 1. On a
$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$
et d'après le théorème de Taylor-Young appliqué à φ de classe $\mathscr{C}^n$
$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Par ailleurs
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{kx}$$

D'où, par dérivation
$$\forall (x,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \qquad \varphi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p \mathrm{e}^{kx}$$

Par unicité du développement limité, on conclut
$$\boxed{\forall p \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!] \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^n = (-1)^n n!}$$

2. D'après le théorème de Taylor-Young appliqué à f de classe $\mathscr{C}^n$, on a
$$f(u) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} u^p + \mathrm{o}(u^n)$$
puis, en permutant les sommes
$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(hk) &= \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[\sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} (hk)^p + \mathrm{o}(h^n) \right] \\
&= \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} h^p \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p \right] + \mathrm{o}(1) = \frac{1}{h^n} f^{(n)}(0) h^n (-1)^n + \mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(hk) \xrightarrow[h \to 0]{} (-1)^n f^{(n)}(0)}$$

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Montrer
$$\| \int_0^1 \mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top \, \mathrm{d}t \|_2 \leqslant \mathrm{Tr} \left(\int_0^1 \mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top \, \mathrm{d}t \right)$$

Corrigé : Par inégalité triangulaire, on a
$$\| \int_0^1 \mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top \, \mathrm{d}t \|_2 \leqslant \int_0^1 \| \mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top \|_2 \, \mathrm{d}t$$

Puis

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \|\mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top\|_2^2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{X}(t)\,\underbrace{\mathrm{X}(t)^\top \mathrm{X}(t)}_{=\alpha(t)}\,\mathrm{X}(t)^\top\right) = \alpha(t)\,\mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top\right)$$

Or, on a
$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^n x_i^2(t) = \mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top\right)$$

Ainsi
$$\int_0^1 \|\mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top\|_2 = \int_0^1 \alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top\right) = \mathrm{Tr}\,\left(\int_0^1 \mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top\,\mathrm{d}t\right)$$

Finalement
$$\boxed{\|\int_0^1 \mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top\,\mathrm{d}t\|_2 \leqslant \mathrm{Tr}\,\left(\int_0^1 \mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top\,\mathrm{d}t\right)}$$

Exercice 11 (**)

Déterminer des majorations pour les expressions suivantes :

1. $\left|\sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6}\right|$ pour x réel
2. $\left|\cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}\right|$ pour x réel
3. $\left|\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right|$ pour $x \geqslant 0$

Corrigé : Pour $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur I, on a pour $(a,b) \in \mathrm{I}^2$

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\mathrm{I}} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

En prenant $a = 0$ et $b = x$, on obtient

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \left|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\mathrm{I}} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

1. On a $\left|\sin^{(4)}\right| \leqslant 1$ et par suite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{|x|^4}{4!}}$$

2. On a $\left|\cos^{(3)}\right| \leqslant 1$ et par suite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{|x|^3}{3!}}$$

3. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et par dérivation

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

d'où $\operatorname*{Sup}_{x\geqslant 0} \left|f^{(3)}(x)\right| \leqslant 2$ et par suite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{|x|^3}{3}}$$

Exercice 12 (**)

Calculer $$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall x>0 \qquad \left|\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x}\frac{|\sin(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2x}$$

Par encadrement $$\boxed{\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Le procédé précédent ne permet pas de conclure pour $x\to 0^+$. On a $\sin(t)\simeq t$ pour t proche de zéro et l'idée consiste donc à contrôler l'écart entre $\sin(t)$ et t. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange et une inégalité de concavité, on a

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad t-\frac{t^2}{2} \leqslant \sin(t) \leqslant t$$

Par suite $$\forall x>0 \qquad \int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

c'est-à-dire $$\forall x>0 \qquad \ln(2)-x \leqslant \int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(2)$$

Par encadrement $$\boxed{\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln(2)}$$

Remarque : On peut éviter le recours à l'inégalité de concavité. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad t-\frac{t^2}{2} \leqslant \sin(t) \leqslant t+\frac{t^2}{2}$$

ce qui est un peu moins bon que précédemment mais suffit pour conclure.