Rappels de Cinématique

Cours

v1.1 Ⓟ

Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

Introduction

Nous avons vu depuis le début de l'année comment asservir/piloter un système. Nous sommes maintenant capables de faire en sorte qu'un système multiphysique/ mécatronique suive une loi de commande préalablement définie. Mais comment obtenir ces lois de commande ?

Le but du jeu **ultime** en mécanique est connaitre le lien entre *efforts* (causes) et *mouvements* (conséquences). C'est là tout l'enjeu de votre programme de mécanique cette année.

Dans ce chapitre de rappels nous nous intéresserons à la *Cinématique* c'est-à-dire à l'étude des mouvements des corps solides indépendamment des causes de ces mouvements. Nous travaillerons en PSI/MP sous l'hypothèse des solides indéformables, vous verrez en école ce qu'il advient si l'on fait sauter cette hypothèse.

1 Généralités

1.1 Solide indéformable

Définition *Un solide indéformable*

C'est un solide dont la masse est constante et indépendante du temps et dont les dimensions sont invariantes quelles que soient les actions extérieures. Il est constitué d'un ensemble de points matériels pour lesquels les distances mutuelles sont constantes et indépendantes du temps.

Si A et B sont deux points d'un solide S alors

$$\forall A, B \in S \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = d$$

Ce modèle permet d'étudier les mouvements du solide sous des efforts extérieurs, il ne permet pas d'étudier la déformation du solide, il ne permet pas de modéliser les solides élastiques (**Hors-programme en MP/PSI**.

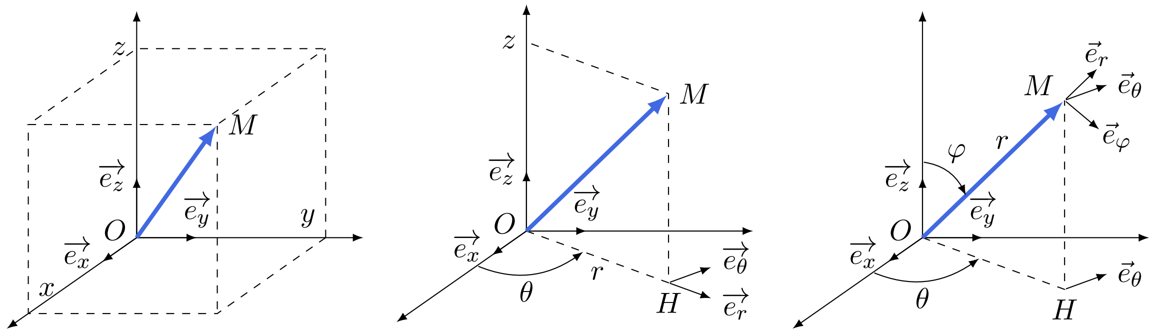
1.2 Repère, référentiel, solides

1.2.1 Notion de référentiel

Afin d'étudier le mouvement d'un point ou d'un système de solides, il est nécessaire de mettre en place un système de référence appelé « référentiel ». Il représente en quelque sorte la position d'observation des phénomènes. Il est composé d'une description de l'espace (repère) et d'une description du temps.

1.2.2 Notion de repère et paramétrages courants

Un repère est défini par une origine et trois vecteurs orthonormés directs formant une base. Les points extrémités des vecteurs unitaires sont à des distances constantes de l'origine.



Coordonnées cartésiennes
$M(x, y, z)$
$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{e_x} + y.\overrightarrow{e_y} + z.\overrightarrow{e_z}$

Coordonnées cylindriques
$M(r, \theta, z)$
$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{e_r} + z.\overrightarrow{e_z}$

Coordonnées sphériques
$M(r, \varphi, \theta)$
$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$

FIGURE 1 – Coordonnées d'un point M dans les 3 systèmes de coordonnées

1.2.3 Équivalence repère - solide

À chaque solide, on attache un repère. Le repère et le solide étant indéformables, on peut les confondre. Ainsi, l'étude des mouvements d'un solide S_k par rapport à un solide S_i notée (S_k/S_i) est identique à :

- l'étude des mouvements du solide S_k par rapport à un repère R_i lié au solide S_i (S_k/R_i),
- l'étude des mouvements du repère R_k lié au solide S_k par rapport au solide S_i (R_k/S_i),
- l'étude des mouvements du repère R_k lié au solide S_k par rapport au repère R_i lié au solide S_i (R_k/R_i).

Remarque

Le référentiel choisi est généralement marqué par le symbole du bâti dans le graphe des liaisons ou sur le schéma cinématique.

1.3 Positionnement d'un point ou d'un solide dans l'espace

1.3.1 Paramétrage pour positionner un point

Pour positionner un point M dans l'espace (3 dimensions) par rapport à un repère R_i, il est nécessaire de paramétrer 3 mouvements. Une possibilité de mouvement est appelée **degré de liberté**. Il faut donc 3 degrés de liberté pour positionner un point dans l'espace. Soit 3 translations (coordonnées cartésiennes), soit 2 translations sur des axes différents et 1 rotation autour d'un axe (coordonnées cylindriques), soit 1 translation sur un axe, et 2 rotations autour de 2 axes (coordonnés sphériques), tel que représenté sur la FIGURE 1.

1.3.2 Paramétrage pour positionner un solide dans l'espace

Pour positionner un solide S_k par rapport à un repère R_i (associé au solide S_i), dans un espace à trois dimensions, il est nécessaire de paramétrer la position du repère R_k par rapport au repère R_i. Il est usuel de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère R_k dans le repère R_i définissant 3 translations;

- les trois angles qui définissent la position de la base du repère R_k par rapport à celle du repère R_i, définissant 3 rotations. Les possibilités de variation de ces six paramètres correspondent aux possibilités de mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i. Il existe donc au maximum six degrés de liberté (trois translations et trois rotations). Une liaison entre deux solides annule p degrés de liberté avec $0 < p \leq 6$.

1.3.3 Angles d'Euler

Les angles d'Euler représentent une possibilité pour définir l'**orientation** d'un solide dans l'espace à l'aide de 3 paramètres angulaires.

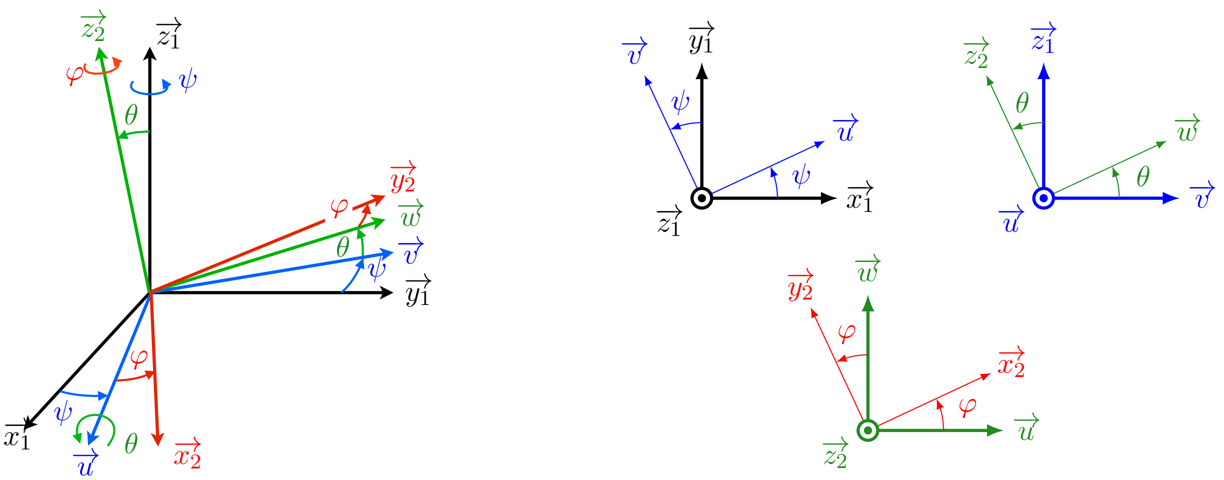
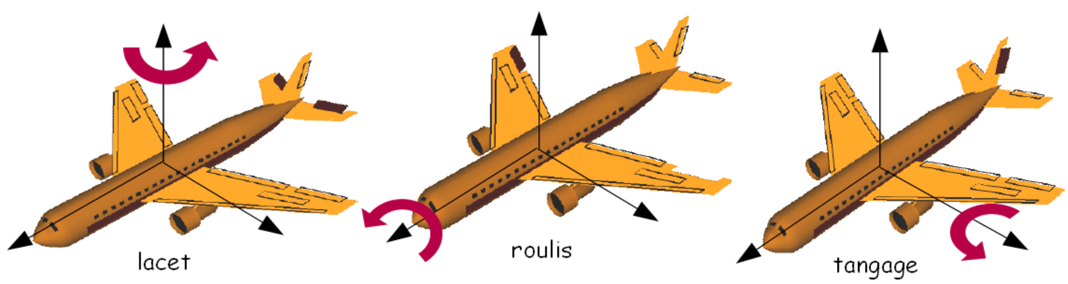


FIGURE 2 – Orientation de deux repères à l'aide des angles d'Euler

Les 3 rotations s'effectuent autour de 3 vecteurs indépendants. En considérant un repère initial $R_1\,(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, le choix des vecteurs de rotation effectué d'après Euler est le suivant :
- la première rotation (notée ψ sur la figure ci-dessus), appelée **précession**, s'effectue autour de z_1 telle que $\psi = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{v})$. On obtient donc le repère $R'_1\,(O_1, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z_1})$;
- la seconde rotation (notée θ sur la figure ci-dessus), appelée **nutation**, s'effectue autour de u telle que $\theta = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$. On obtient donc le repère $R''_1\,(O_1, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z_2})$;
- la dernière rotation (notée φ sur la figure ci-dessus), appelée **rotation propre**, s'effectue autour de z_2 telle que $\varphi = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{y_2})$. On obtient donc le repère $R_2\,(O_1, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$.

1.3.4 Angles de roulis, de tangage et de lacet

Pour les systèmes du domaine des transports, on privilégie les angles de roulis, de tangage et de lacet.



2 Cinématique du point

2.1 Repérage d'un point

Définition *Repérage d'un point*

Soit un repère de référence $R_0\,(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ et un point M de l'espace quelconque. On définit la position du point M par le vecteur position :

$$\overrightarrow{O_0M} = x_M(t).\overrightarrow{x_0} + y_M(t).\overrightarrow{y_0} + z_M(t).\overrightarrow{z_0}$$

Le vecteur position est une fonction vectorielle du temps (car toutes ses coordonnées peuvent dépendre du temps). Ses coordonnées s'expriment en mètre [m].

2.2 Trajectoire

La trajectoire du point M dans le repère R_0 est l'ensemble des positions de M dans le repère R_0 lorsque le temps décrit un intervalle donné.

2.3 Vitesse d'un point dans un référentiel

2.3.1 Vitesse moyenne

On considère la position à l'instant t du point M dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ notée $\overrightarrow{O_0M}(t)$. On note le vecteur position à l'instant $t + \Delta t$: $\overrightarrow{O_0M}(t + \Delta t)$.

Définition *Vitesse moyenne*

La vitesse moyenne du point M dans son mouvement par rapport à R_0 est :

$$[\overrightarrow{V_{M/R_0}}]_{moy} = \frac{\overrightarrow{O_0M}(t+\Delta t) - \overrightarrow{O_0M}(t)}{\Delta t}$$

2.3.2 Vitesse instantanée

L'inconvénient de la vitesse moyenne est la définition de l'intervalle de temps Δt qui ne permet pas une définition unique de la vitesse. La vitesse instantanée permet de définir la vitesse d'un point par rapport à un référentiel à l'instant t.

Définition *Vitesse instantanée*

On appelle vecteur vitesse instantanée ou vitesse à l'instant t du point M dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$, le vecteur : $\overrightarrow{V_{M/R_0}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{O_0M}(t+\Delta t) - \overrightarrow{O_0M}(t)}{\Delta t}$

On note cette limite : $\overrightarrow{V_{M/R_0}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0M}(t)}{dt}\right]_{R_0}$

La dimension de la vitesse instantanée est une longueur sur un temps, son unité est le mètre par seconde [m.s^{-1}].

Remarque

La droite support du vecteur vitesse instantanée est tangente à la trajectoire du point M dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ à un instant t donné.

Attention

L'écriture de la vitesse $\overrightarrow{V_{M/R_0}}$ implique de choisir un point fixe de R_0 pour définir le vecteur position $\overrightarrow{O_0M}$.

Attention

Ce n'est pas parce qu'on dérive par rapport à un repère R donné que l'on doit exprimer le résultat dans ce même repère !!!

2.4 Accélération d'un point par rapport à un référentiel

Définition *Accélération instantanée*

L'accélération instantanée du point M par rapport au repère R_0 est définie par :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/R_0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{M/R_0}}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{O_0M}(t)}{dt^2}\right]_{R_0}$$

Son unité est le mètre par seconde carré [m.s^{-2}].

3 Dérivation vectorielle et vecteur taux de rotation

Pour calculer des vitesses et des accélérations, on est amené à dériver des vecteurs par rapport à un référentiel donné. La méthode qui consiste à exprimer les vecteurs à dériver dans le repère du référentiel puis à dériver leurs coordonnées conduit très souvent à des calculs lourds et à des expressions gigantesques. Une autre méthode consiste à **changer de base de dérivation.**

3.1 Formule de dérivation vectorielle

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ en mouvement par rapport à un repère R_0 et un repère R_1 en mouvement également par rapport à R_0.

Définition *Dérivation vectorielle - Formule de Bour*

La formule de dérivation vectorielle, appelée parfois « Formule de Bour » est :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u}$$

où $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}$ est le vecteur taux de rotation (ou vitesse angulaire) de R_1 par rapport à R_0.

Remarque

Si $\overrightarrow{u}$ est fixe dans R_1, la formule se simplifie : $\left[\dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u}$
Toujours essayer de choisir le repère de dérivation pour se ramener à cette formule simplifiée.

Dans le cas d'une rotation autour d'un axe $(O, \overrightarrow{z})$ de R_1 par rapport à R_0 d'un angle $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$, le vecteur taux de rotation est parallèle à l'axe de rotation (dirigé dans l'exemple selon $\overrightarrow{z}$) et a pour norme la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, orienté dans le sens direct. Il s'exprime en rad.s^{-1} : $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \dot{\theta}\overrightarrow{z}$.

Attention

La formule de Bour est utilisée essentiellement pour **dériver des vecteurs unitaires**. On n'utilisera pas cette formule pour dériver un vecteur vitesse ou position, par exemple.

3.2 Propriétés du vecteur taux de rotation

3.2.1 Antisymétrie

Propriété *Antisymétrie*

Soient un repère R_0 et un repère R_1 : $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = -\overrightarrow{\Omega_{R_0/R_1}}$

3.2.2 Composition des vecteurs taux de rotation

Considérons 3 repères R_0, R_1 et R_2 et un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque. En appliquant la formule de dérivation composée précédente, on obtient :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u} \qquad \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} \wedge \overrightarrow{u}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_2} = \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega_{R_0/R_2}} \wedge \overrightarrow{u}$$

En additionnant les trois relations précédentes, on a : $\overrightarrow{0} = \left(\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_0/R_2}}\right) \wedge \overrightarrow{u}$

Définition *Composition des vecteurs taux de rotation*

Pour $\overrightarrow{u}$ quelconque, on en déduit **la composition des vecteurs taux de rotation** :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}$$

On peut généraliser cette relation pour n repères.

4 Cinématique du Solide

4.1 Champ des vecteurs vitesse d'un solide

Soit un solide S_1, le repère R_1 est associé au solide S_1. Ce solide est en mouvement par rapport au repère R_0.
A un point du solide S_1. On note $\overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}}$ la vitesse du point A appartenant au solide S_1 dans son mouvement par rapport au repère R_0, de même $\overrightarrow{V_{B\in S_1/R_0}}$ la vitesse du point B.
L'ensemble des vecteurs vitesse des points du solide S_1 est appelé champ des vecteurs vitesse (FIGURE 3).

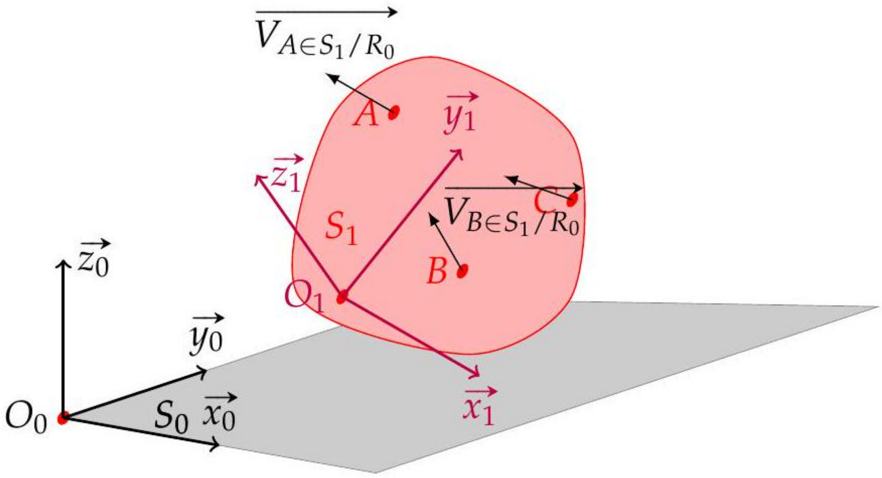


FIGURE 3 – Champ des vecteurs vitesse

TODO

On se propose de déterminer une relation entre les vitesses de deux points d'un même solide. On note $\overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in S_1/R_0}}$ la vitesse des deux points A et B du solide S_1 par rapport au repère R_0.

On peut écrire une première égalité :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AB}\right]_{B_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OB}\right]_{B_0} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OA}\right]_{B_0}$$
$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AB}\right]_{B_0} = \overrightarrow{V_{B\in S_1/R_0}} - \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}}$$

puis une deuxième en déterminant cette dérivée à partir de la définition de la dérivée vectorielle d'un vecteur quelconque :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AB}\right]_{B_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AB}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

avec $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AB}\right]_{B_1} = \overrightarrow{0}$ car $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur constant dans R_1

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AB}\right]_{B_0} = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

en égalisant :

$$\overrightarrow{V_{B\in S_1/R_0}} - \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

À retenir

La relation entre les vitesses de deux points d'un solide s'écrit finalement :

$$\overrightarrow{V_{B\in S_1/R_0}} = \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On nomme cette relation :

- relation de changement de point,
- relation de transport,
- **relation de Varignon**

Remarque

Pourquoi « BABAR » ? Car cette relation est intrinsèque au fonctionnement d'un torseur. Elle est vraie quel que soit le torseur considéré. Ainsi pour tout torseur représenté par un moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et une résultante $\overrightarrow{R}$, on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$$

Ce qui se lit en termes d'indices : BABAR.

Cette relation est caractéristique du champ de vecteurs équiprojectifs.
Elle va nous permettre, connaissant le vecteur vitesse de rotation et la vitesse d'un des points du solide par rapport à une repère, de déterminer la vitesse de tous les points du solide par rapport à ce repère.

Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses Soit A et B deux points d'un solide S_1, on a alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = d \text{ ou}$$
$$\overrightarrow{AB}^2 = d^2$$

En dérivant cette relation

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}^2}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}{\mathrm{dt}} = 0 \qquad \text{(car constant)}$$

en dérivant le produit scalaire :

$$0 = 2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AB}\right]_{B_0} = 2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OB}\right]_{B_0} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OA}\right]_{B_0}\right)$$
$$0 = 2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{V_{B\in S_1/R_0}} - \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}}\right)$$

d'où la relation :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_{B\in S_1/R_0}} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}}$$

La vitesse d'un point A d'un solide S_1 projetée sur le droite qui relie la droite (A, B) est égale à la la vitesse du point B projetée sur cette même droite.
Cette relation est caractéristique de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses.

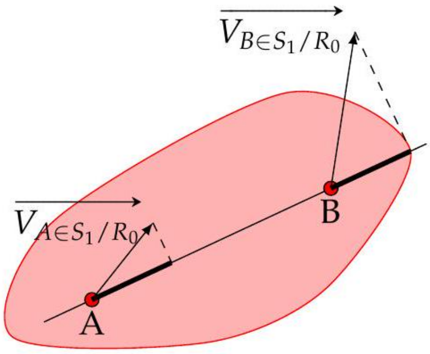


FIGURE 4 – Équiprojectivité

Mouvement de rotation autour d'un axe fixe Soit I un point de S_1 tel que $\overrightarrow{V_{I\in S_1/R_0}} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \neq \overrightarrow{0}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} &= \overrightarrow{V_{I\in S_1/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{IA} \\
\overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} &= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{IA} \\
\overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} &= \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{IA}
\end{aligned}$$

Alors la vitesse est perpendiculaire au rayon IA et à la vitesse de rotation :

$$\overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} \perp \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} \perp IA$$

Si on pose :

$$\begin{array}{lll}
(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) & & \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{IA} \\
\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \omega \cdot \vec{w} & \text{alors} & \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} = \omega \cdot \vec{w} \wedge (-R \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{w}) \\
\overrightarrow{IA} = R \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{w} \text{ avec } \vec{w} \perp \vec{u} & & \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} = R \cdot \omega \cdot \vec{v}
\end{array}$$

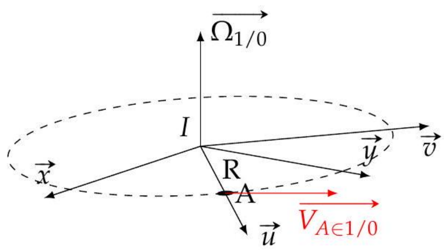


FIGURE 5 – Mouvement de rotation

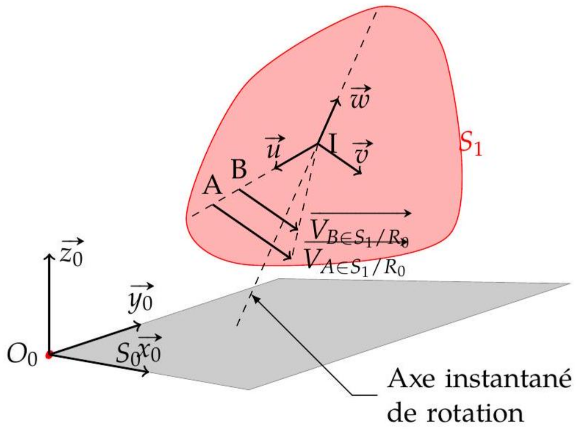


FIGURE 6 – Axe instantané de rotation

La vitesse du point A est proportionnelle à la distance entre A et l'axe instantané de rotation et elle est portée par la perpendiculaire à $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$.

- Si le point I n'est pas unique, alors, l'ensemble des points I tels que $\overrightarrow{V_{I\in S_1/R_0}} = \vec{0}$ forme l'axe instantané de rotation. Le mouvement est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans le repère d'étude.
- Si le point I est unique alors le mouvement est un mouvement de rotation autour d'un point (mouvement sphérique).

Mouvement plan : CIR On dit qu'un mouvement est plan lorsque :

$$\forall A \in S_1, \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}} \perp \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

L'intersection de l'axe instantané de rotation avec le plan contenant les vitesses est appelé **centre instantané de rotation** (CIR). On note I_{10} le CIR du mouvement du solide S_1 par rapport au solide S_1.

$$\overrightarrow{V_{I_{10}\in 1/0}} = \vec{0}$$

Associé avec l'equiprojectivité, ces deux propriétés, permettent de déterminer graphiquement toutes les vitesses d'un solide dans un mouvement plan sur plan.

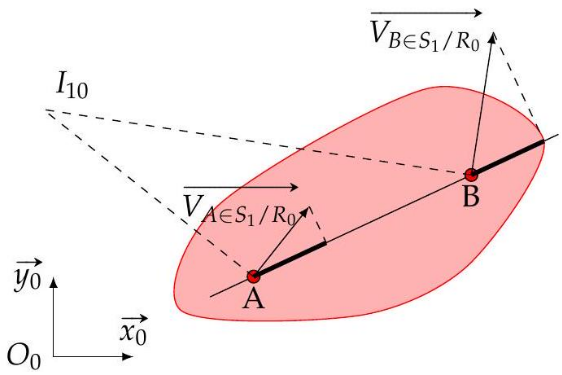


FIGURE 7 – Centre instantané de rotation

Mouvement hélicoïdal On dit qu'un mouvement hélicoïdal lorsque la vitesse d'un point I est colinéaire à la vitesse de rotation :

$$\exists I \text{ tel que } \overrightarrow{V_{I\in 1/0}} = \lambda \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

Mouvement de translation Dans un mouvement de translation du solide S_1 par rapport au solide R_0 : $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \overrightarrow{0}$

$$\forall A, B \in S_1, \overrightarrow{V_{B\in S_1/R_0}} = \overrightarrow{V_{A\in S_1/R_0}}$$

4.2 Composition des vecteurs vitesse

On se propose de déterminer la relation entre la vitesse du point P du solide S_2 en mouvement par rapport au solide S_1 lui-même en mouvement par rapport au solide S_0. A chacun de ces solides on associe un repère (FIGURE 8).

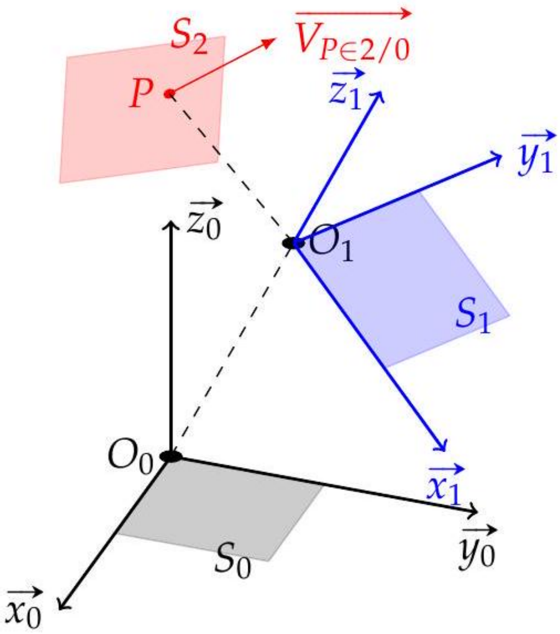


FIGURE 8 – Composition des vitesses

TODO

Déterminons : $\overrightarrow{V_{P\in 2/0}}$.

Par définition :

$$\overrightarrow{V_{P\in 2/0}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O_0}P}\right]_0 = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O_0O_1}}\right]_0 + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O_1}P}\right]_0$$

- Premier terme : on reconnaît la vitesse du point O_1 de S_1 par rapport à R_0.

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O_0O_1}}\right]_0 = \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}}$$

- Second terme : on ne peut pas calculer directement la dérivée $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O}_1 P}\right]_0$, car ni le point O_1 et P ne sont des points fixes de R_0, il faut donc utiliser la relation de dérivation vectorielle d'un vecteur quelconque en passant par le repère R_1 :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O}_1 P}\right]_0 = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O}_1 P}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P}$$

avec $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ le vecteur vitesse de rotation de S_1 par rapport à S_0 (R_1 par rapport à R_0). On reconnaît : $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O}_1 P}\right]_1 = \overrightarrow{V_{P\in 2/1}}$, la vitesse du point P de S_2 dans son mouvement par rapport au référentiel

$$R_1 = (O_1, \overrightarrow{x_{x_1}}, \overrightarrow{y_{x_1}}, \overrightarrow{z_{x_1}})\, y_1 z_1$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O}_1 P}\right]_0 = \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P}$$

on a donc :

$$\overrightarrow{V_{P\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P}$$
$$\overrightarrow{V_{P\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P}$$

Si on considère le point P du solide S_1 qui coïncide avec le point P de S_2, on reconnait alors dans cette relation la vitesse de P de S_1 dans son mouvement par rapport à S_0

$$\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} = \overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$$

Propriété

On obtient finalement la relation de composition des vitesses :

$$\overrightarrow{V_{P\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$$

La vitesse d'un point P d'un solide S_2 par rapport à un repère R_0 est égale à la somme de la vitesse du point P appartenant à S_2 par rapport au solide S_1 (repère R_1) et de la vitesse du point P fixe dans le solide S_1 par rapport au repère R_0.

Définition

On appelle :

- $\overrightarrow{V_{P\in 2/0}}$: **Vitesse absolue**, la vitesse du point P d'un solide S_2 par rapport à un référentiel R_0.
- $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}$: **Vitesse relative**, la vitesse du point P d'un solide S_2 par rapport au un référentiel R_1 mobile par rapport au référentiel R_0.
- $\overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$: **Vitesse d'entraînement**, la vitesse du point P fixe dans le référentiel R_1 par rapport au référentiel R_0..

Remarque

On peut généraliser : soit P un point du solide S_{i+1} mobile par rapport au solide S_i lui même mobile par rapport au solide $S_{i-1}, \ldots$,lui même mobile par rapport au solide S_1, lui même mobile par rapport à S_0. Alors

$$\overrightarrow{V_{P\in(i+1)/0}} = \overrightarrow{V_{P\in(i+1)/i}} + \overrightarrow{V_{P\in i/(i-1)}} + \cdots + \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$$

4.3 Composition des vecteurs accélération

On se propose de déterminer l'accélération du point P du solide S_2 en mouvement par rapport au solide S_1 lui-même en mouvement par rapport au solide S_0. Nous savons que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{P\in 2/0}} &= \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{P\in 1/0}} \\
\overrightarrow{V_{P\in 2/0}} &= \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P}
\end{aligned}$$

Dérivons cette relation par rapport au temps dans le repère R_0.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{P\in 2/0}}\right]_0 &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right]_0 \\
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}\right]_0 + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}}\right]_0 + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right]_0 \\
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}\right]_0 + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right]_0 \\
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}\right]_0 + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{O_1P}\right]_0 \\
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{O_1P}\right]_0 \\
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{O_1P}\right]_0 \\
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0^{\longrightarrow} \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{O_1P}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) \\
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0^{\longrightarrow} \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) \\
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right)
\end{aligned}$$

finalement en réorganisant :

$$\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/1}}$$

Définition

On note :
- $\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}}$: **accélération absolue** du point P appartenant à S_2 par rapport à R_0.
- $\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/1}}$: **accélération relative** du point P appartenant à S_2 par rapport à S_1.
- $\overrightarrow{\Gamma_{P\in 1/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right)$: **accélération d'entraînement** du point M appartenant à S_1 par rapport à R_0.
- $2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/1}}$: **accélération de Coriolis**.

Relation entre les vecteurs accélération de deux points d'un solide Soient A et B deux points du solide S_1.
Le champ des vecteurs vitesse permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

En dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}\right]_0 &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}\right]_0 + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}\right]_0 \\
\overrightarrow{\Gamma_{B\in 1/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AB}\right]_0 + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0 \wedge \overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{\Gamma_{B\in 1/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AB}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}\right) + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0 \wedge \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Propriété

On obtient la relation de composition des accélérations :

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}\right) + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_0 \wedge \overrightarrow{AB}$$

Remarque

Le champ des accélérations n'est pas un champ équiprojectif.

5 Cinématique du contact ponctuel entre deux solides

Soient deux solides S_1 et S_0 en contact ponctuel au point I. On note $\vec{n}$, la normale au plan tangent passant par I.$\vec{t}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs unitaires du plan tangent en I tel que $\vec{t} \wedge \vec{u} = \vec{n}$.

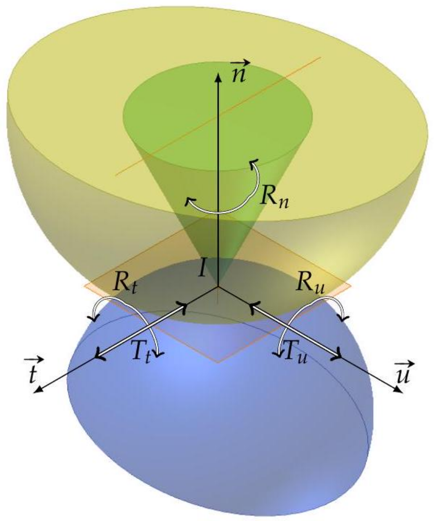


FIGURE 9 – Illustration d'un contact ponctuel entre deux solides.

Les mouvements possibles entre les deux solides sont :

- une translation dans le plan tangent, décomposable en deux translations élémentaires suivant $\vec{t}$ et $\vec{u}$;
- une rotation autour de l'axe $(I, \vec{n})$, (on nomme cette rotation, le pivotement) ;
- une rotation dans le plan tangent (le roulement) décomposable en deux rotations élémentaires suivant les axes $(I, \vec{t})$ et $(I, \vec{u})$.

Le mouvement entre les deux solides peut donc être décrit par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_{I,1/0}} & = & V_t \cdot \vec{t} + V_u \cdot \vec{u} \\ \overrightarrow{\Omega_{1/0}} & = & \omega_t \cdot \vec{t} + \omega_u \cdot \vec{u} + \omega_p \cdot \vec{n} \end{cases}$$

On appelle $\overrightarrow{V_{I\in 1/0}}$ la **vitesse de glissement** de S_1 par rapport à S_0

5.1 Roulement sans glissement

Définition *Roulement sans glissement*

Si $\overrightarrow{V_{I\in 1/0}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega r_{1/0}} \neq \vec{0}$, on dit que le mouvement est un roulement sans glissement.

Remarque

C'est une question ultra classique. Il faut impérativement savoir comment cela fonctionne et ce que chaque terme signifie.

Attention

Pour calculer la vitesse du point I, $\overrightarrow{V_{I\in 1/0}}$: **il ne faut surtout pas dériver le vecteur** $\overrightarrow{OI}$! Le point I n'est pas un point matériel, c'est un point géométrique : il est défini comme le point de contact entre les deux solides, mais il n'appartient d'un point de vue physique, à aucun des deux !

Remarque

La notion de roulement sans glissement se comprend bien en imaginant le déroulement d'un engin à chenilles.

6 Torseur cinématique

6.1 Notion de torseur

Un torseur est une fonction. Rien de plus rien de moins.

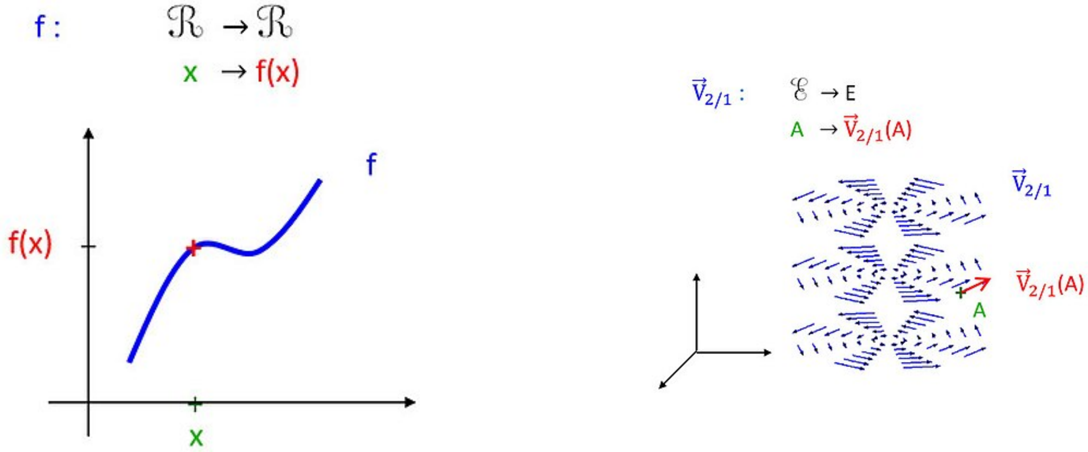


FIGURE 10 – Représentation d'une fonction f qui à x (antécédent) associe $f(x)$ (image) et du torseur V. *Source : Wikipedia*

Il y a le même lien entre le torseur V et $V(A)$ que entre f et $f(x)$. C'est-à-dire : un torseur, est une fonction : un champ. À tout **point A** (antécédent) on associe un **vecteur** (image).

Considérons un champ de vecteur.

Définition *Équiprojectivité :*

Un champ de vecteur est projectif si pour deux points quelconques P et Q :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(Q)} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\mathcal{M}(P)} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Ce champ est alors **un champs de moment, il peut être représenté par un torseur**

Définition

Un torseur $\mathcal{T}$ est un **champs de vecteur équiprojectif** défini sur un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 à valeurs vectorielles.
Soit un point P de $\mathcal{E}$. La valeur $\mathcal{T}$(P) que prend le champ en ce point est appelée « moment du torseur $\mathcal{T}$ au point P ».
On appelle torseur au point P,

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P)} \end{matrix} \right\}_P$$

l'ensemble constitué des deux vecteurs :

- $\overrightarrow{R}$: la *résultante du torseur*, c'est un **invariant**,
- $\overrightarrow{\mathcal{M}(P)}$: le *moment du torseur au point* P.

En mécanique, on note en général $\overrightarrow{T}(P) = \mathcal{T}(\mathrm{P})$.
En mécanique, l'espace affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ correspond à l'espace réel dans lequel le vecteur nul ne joue plus aucun rôle particulier. Chaque vecteur de l'espace vectoriel de départ devient un simple point de l'espace. Le torseur $\mathcal{T}$ peut être le champ des moments d'une force, le champ des vecteurs vitesse d'un solide indéformable (*cf. votre première année*) ou bien des moments cinétiques ou dynamiques d'un solide quelconque (*cf. votre deuxième année*)

Propriété

Soit $\overrightarrow{\mathcal{M}(P)}$, la fonction vectorielle associée au point P de l'espace. Soit Q un point de l'espace, et $\overrightarrow{\mathcal{M}(Q)}$ la fonction associée. Si le champ de vecteur est un champ de moment alors il existe un vecteur $\overrightarrow{R}$ appelé *Résultante* unique tel que pour tous les points P et Q.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(Q)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(P)} + \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{R}$$

Un champ vectoriel que l'on peut mettre sous forme de torseur, vérifie tout un tas de propriétés, notamment celles que l'on précise ci-dessous :

Propriété

1. **Égalité de deux torseurs** Deux torseurs sont égaux s'ils ont même éléments de réduction en un point, réciproquement s'ils ont même éléments de réduction en un même point, ils sont égaux.

$$\{\mathcal{T}_1\} = \{\mathcal{T}_2\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(P)} \end{matrix}\right\}_P = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2(P)} \end{matrix}\right\}_P \quad \text{alors} \quad \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(P)} = \overrightarrow{\mathcal{M}_2(P)} \end{matrix}\right.$$

2. **Torseur nul** Un torseur est nul, si ses éléments de réductions en un point sont nuls. Ces éléments de réduction sont alors nuls en tout point.
3. **Addition de deux torseurs** Soit $\{\mathcal{T}_1\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)} \end{matrix}\right\}_A$ et $\{\mathcal{T}_2\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2(A)} \end{matrix}\right\}_A$ deux torseurs écrits au même point **A** alors la somme des torseurs s'écrit :

$$\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_1\} + \{\mathcal{T}_2\}$$
$$\{\mathcal{T}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2(A)} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)} + \overrightarrow{\mathcal{M}_2(A)} \end{matrix}\right\}_A$$

Attention

La somme de deux torseurs, qui plus est de leurs composantes ne peut s'écrire qu'**au même point**.

Propriété

4. **Comoment de deux torseurs** Soit $\{\mathcal{T}_1\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)} \end{Bmatrix}_A$ et $\{\mathcal{T}_2\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2(A)} \end{Bmatrix}_A$ deux torseurs écrits au même point A alors on note

$$C = \{\mathcal{T}_1\} \otimes \{\mathcal{T}_2\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2(A)} \end{Bmatrix}_A = \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_2(A)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)}$$

Le **comoment est un scalaire**, le résultat ne dépend pas du point de calcul, **c'est un invariant**.

5. **Automoment (Hors-programme)** Il s'agit du comoment d'un torseur avec lui-même. Soit $\{\mathcal{T}_1\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)} \end{Bmatrix}_A$ alors :

$$A = \{\mathcal{T}_1\} \otimes \{\mathcal{T}_1\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)} \end{Bmatrix}_A = 2 \cdot \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)}$$

6. **Torseur Couple** Un torseur est dit torseur couple si la résultante du torseur est nulle. Le moment d'un torseur couple est identique en tout point.

$$\{\mathcal{C}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(P)} \end{Bmatrix}_{\forall P}$$

L'automoment d'un torseur couple est nul

7. **Torseur Glisseur** Un torseur est un torseur glisseur si la résultante d'un torseur n'est pas nulle et que l'automoment est nul. Il existe alors un point A tel que :

$$\{\mathcal{G}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(A)} = \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_A$$

8. **Axe central** On appelle axe central du torseur la droite $(A, \vec{u})$ telle que pour tout P appartement à la droite $(A, \vec{u})$ on a

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_1(P)} = \lambda \cdot \overrightarrow{R_1}$$

9. **Réduction canonique d'un torseur** On appelle réduction canonique d'un torseur, sa réduction en un point de l'axe central.

6.2 Vers le torseur cinématique

Nous avons vu que les vitesses des points d'un solide se déduisent à partir de la relation de Varignon :

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

avec $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ le vecteur vitesse de rotation du solide 1 par rapport au référentiel 0.

En multipliant les deux membres de cette égalité par $\overrightarrow{AB}$ on en déduit la propriété d'équiprojectivité :

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le champ des vecteurs vitesses étant un champ de vecteurs équiprojectifs, on peut définir le torseur cinématique.

À retenir

On écrira donc *torseur cinématique*, le champ des vecteurs vitesse défini pour un mouvement de solides indéformables.

$$\{\mathcal{V}_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \\ \overrightarrow{V_{P\in i/j}} \end{Bmatrix}_P$$

Les éléments de réduction de ce torseur en un point P sont respectivement :

- $\overrightarrow{\Omega}(i/j)$ le vecteur rotation ; qui est ici l'invariant, la *résultante*
- $\overrightarrow{V}(P, i/j)$ le vecteur vitesse calculé au point P, qui est le moment du torseur.

- Cas de la rotation

Le torseur cinématique d'un solide en rotation par rapport à un référentiel s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{1\in 1/0}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

S'il n'existe qu'un seul point A, alors la rotation se fait autour du point A, le mouvement est sphérique, s'il existe une infinité de point A alors le mouvement est une rotation autour de la droite formée par ces points. Ce torseur est un *torseur glisseur*.

- Cas de la translation

Le torseur cinématique d'un mouvement de translation s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{P\in 1/0}} \end{Bmatrix}_{\forall P\in 1}$$

Ce torseur est un *torseur couple*.

- Cas d'un mouvement hélicoïdal

Le torseur cinématique d'un mouvement hélicoïdal s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}_{10} \cdot \vec{u} \\ \\ \overrightarrow{V_{P\in 1/0}} = \lambda \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \end{Bmatrix}_{\forall P\in (A,\vec{u})}$$

Si $\lambda = 0$ alors le mouvement est un mouvement de rotation autour de l'axe $(A, \vec{u})$.

7 Rappels - Trigonométrie

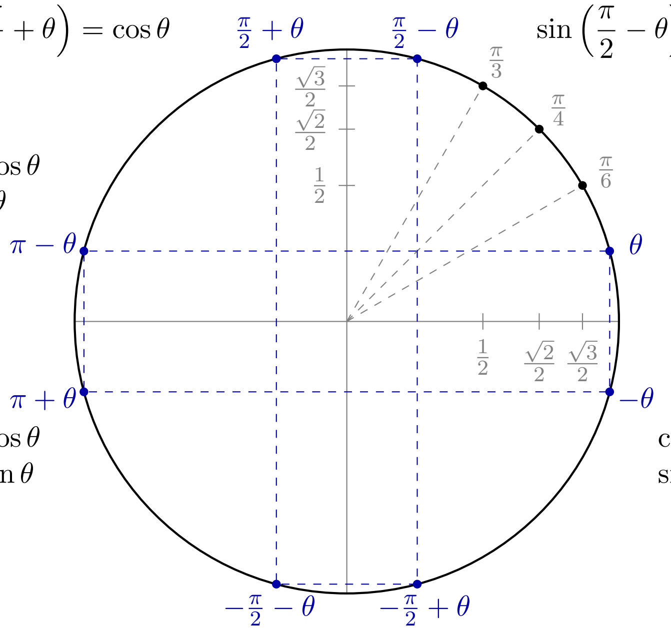
7.1 Cercle trigonométrique

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet d'obtenir rapidement les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$



$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

θ [rad]	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\sin(\theta)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\tan(\theta)$	$\frac{0}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	indéfini

Table 1 – Valeurs particulières des fonctions trigonométriques.

7.2 Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

7.3 Formules d'addition

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b} \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}$$

7.4 Formules de linéarisation

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \qquad \tan^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}$$

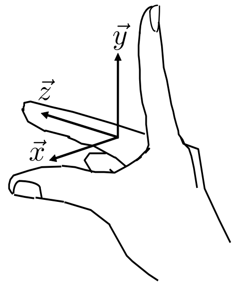
8 Rappels - Calcul vectoriel

Les théories de la mécanique utilisent des grandeurs qui peuvent mathématiquement être représentées par des vecteurs (vitesse, position, accélération, force...). Ces vecteurs sont des éléments d'espaces vectoriels euclidiens sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 noté (E). Les grandeurs vecteurs sont intrinsèques, elles sont indépendantes de la base dans laquelle elles sont représentées.

8.1 Repérage des vecteurs

8.1.1 Base

L'association de trois vecteurs indépendants forme une base b de (E), noté $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Tout vecteur $\overrightarrow{V}$ se décompose de manière unique sur cette base :



$$\overrightarrow{V} = v_x.\vec{x} + v_y.\vec{y} + v_z.\vec{z}$$

On utilisera en Sciences de l'Ingénieur des bases orthonormées directes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, c'est-à-dire des vecteurs orthogonaux, de même norme égale à 1. La base est directe si elle vérifie la « règle de la main droite ».

8.1.2 Repère

Un repère est une base vectorielle associée à un point appelé origine. En mécanique du solide, on a l'habitude d'associer un repère $R_i(O_i, \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$ à chaque solide S_i.

8.1.3 Référentiel

Un référentiel est une base vectorielle associée à une origine spatiale et temporelle. Il est défini par rapport à un référentiel fixe considéré comme galiléen [1].

Remarque *Base - repère - référentiel*

- Un vecteur est exprimé dans une base, on parle alors de ses composantes (indépendantes de sa position dans l'espace) ;
- Un point est exprimé dans un repère, on parle alors de ses coordonnées (qui dépendent de son origine) ; Pour un point M dans un repère, avec une origine O, on peut donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$, exprimées dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\overrightarrow{OM} = OM_x.\vec{x} + OM_y.\vec{y} + OM_z.\vec{z}$$

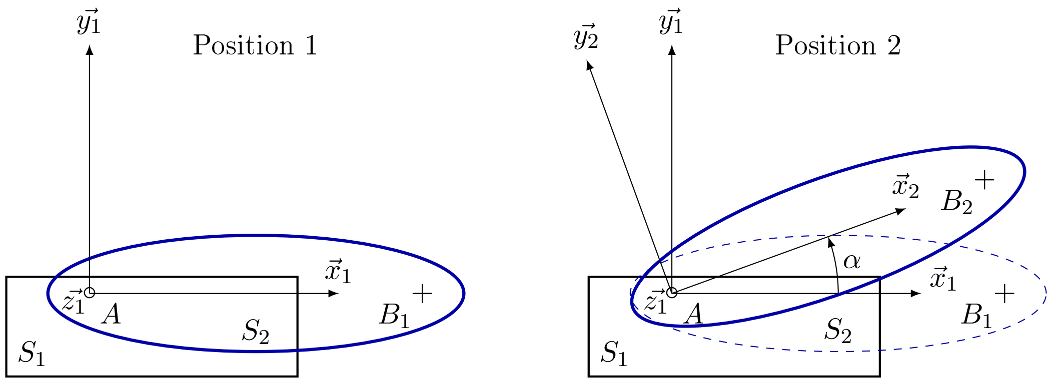
- Les référentiels liés à la Terre seront tout le temps considérés comme étant galiléen.

8.1.4 Expression d'un vecteur dans différents repères

Considérons un système de solides S_1 et S_2 liés par une articulation (pivot) de centre A et d'axe perpendiculaire au plan de la feuille. Considérons le point B appartenant au solide S_2 à une distance L de A. Le solide S_1 est fixe par rapport à la feuille. À l'instant t_1 le système est en position 1, considérons le vecteur $\overrightarrow{AB_1}$, puis à l'instant t_2 le système est en position 2, considérons le vecteur $\overrightarrow{AB_2}$.

1. Un référentiel est dit galiléen, lorsqu'il vérifie le principe d'inertie, c'est-à-dire que tout corps ponctuel libre est en mouvement de translation rectiligne uniforme, ou au repos.

Pour caractériser ces deux vecteurs nous pouvons les exprimer dans une base (un repère si l'on précise une origine). Le choix du repère est arbitraire, soit $R_1(A, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ le repère orthonormée défini sur la figure en position 1 d'origine A ou $R_2(A, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ le repère orthonormé défini sur la figure en position 2 d'origine A également.



Notons L la longueur du segment $[AB]$. Dans la position 1, on a $\overrightarrow{AB_1} = L.\vec{x_1}$ dans le repère R_1. Dans la position 2, on a $\overrightarrow{AB_2} = L.\vec{x_2}$ dans le repère R_2. Mais aussi $\overrightarrow{AB_2} = L\cos\alpha.\vec{x_1} + L\sin\alpha.\vec{y_1}$ dans le repère R_1.

8.2 Produit scalaire

Définition *Produit scalaire*

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre**, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

En SII, on manipule essentiellement des vecteurs unitaires. Dans ce cas, en admettant que $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos\theta$$

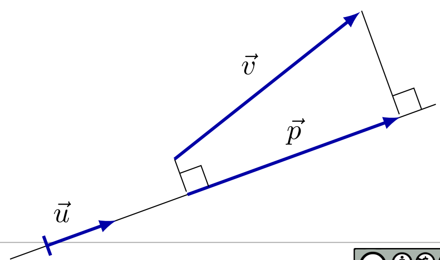
Propriété

- Commutativité : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;
- Distributivité : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$;
- Linéarité : $\lambda.\vec{u}\cdot\mu.\vec{v} = \lambda\mu\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
- Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u}\perp\vec{v}$;
- Si $\vec{u}//\vec{V}$ alors on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = \varepsilon\,\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

8.2.1 Expression analytique

Dans une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut montrer que le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par la relation entre les coordonnées :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$



8.2.2 Interprétation géométrique

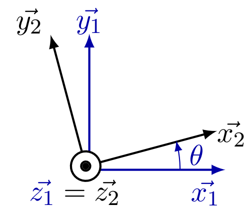
Soit $\vec{p}$ la projection vectorielle d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (unitaire) alors :

$$\vec{p} = (\vec{v} \cdot \vec{u}).\vec{u}$$

8.3 Changement de bases

8.3.1 Principe

Dans la pratique, la lecture de figure spatiale étant délicate, on se ramène toujours à des figures planes. Dans la plupart des cas, le passage d'une base à une autre est réalisé par *une rotation plane*.
Pour faciliter le calcul des projections, on utilise des figures géométrales appelées aussi figures de projection ou figures de calcul ou figures de changement de bases.



Attention

Ces figures seront toujours réalisées avec des angles positifs proche de 20°, le vecteur commun aux deux bases étant perpendiculaire à la feuille toujours dirigé vers le lecteur de la figure.

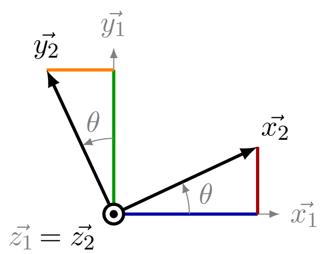
Vous devez être capables de retrouver les projections des différents vecteurs *sans hésitation* :

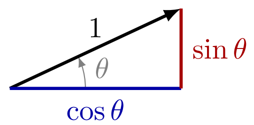
$$\vec{x_2} = \cos\theta.\vec{x_1} + \sin\theta.\vec{y_1} \qquad \vec{y_2} = \cos\theta.\vec{y_1} - \sin\theta.\vec{x_1}$$
$$\vec{x_1} = \cos\theta.\vec{x_2} - \sin\theta.\vec{y_2} \qquad \vec{y_1} = \cos\theta.\vec{y_2} + \sin\theta.\vec{x_2}$$

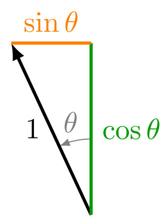
Pour éviter toute erreur, il est utile de vérifier ses formules de projection en $\theta = 0$ et $\theta = 90°$.

8.3.2 Astuce de calcul avec les figures planes

Quand on cherche à projeter un vecteur dans une autre base avec une figure plane, si on a bien dessiné la figure *avec un angle de 20° environ*, on voit apparaitre un triangle rectangle de la forme ci-dessous, avec un « petit côté » et un « grand côté ». Comme on raisonne sur des vecteurs unitaires, l'hypoténuse est de longueur égale à 1.







$\vec{x_2} = \cos\theta.\vec{x_1} + \sin\theta.\vec{y_1}$ $\qquad$ $\vec{y_2} = -\sin\theta.\vec{x_1} + \cos\theta.\vec{y_1}$

Il suffit alors de retenir que *« petit côté » = sinus* et *« grand côté » = cosinus*, et de raisonner sur la direction des vecteurs pour déduire le signe.

8.4 Produit vectoriel

Définition *Produit vectoriel*

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un *vecteur*, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})\vec{w}$$

avec $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un trièdre direct.

En SII, on manipule essentiellement des vecteurs unitaires. Dans ce cas, en admettant que $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \sin\theta.\vec{w}$$

Propriété

- Distributivité : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$;
- Linéarité : $\lambda.\vec{u} \wedge \mu.\vec{v} = \lambda\mu\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$;
- Anti-symétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

8.4.1 Expression analytique

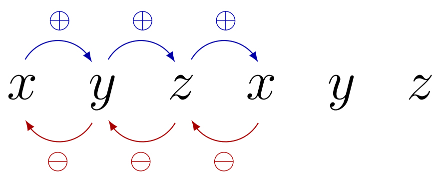
Dans une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut montrer que le produit vectoriel entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par la relation entre les coordonnées (par la méthode du « Gamma ») :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = (u_x v_y - u_y v_x)\overrightarrow{z} + (u_y v_z - u_z v_y)\overrightarrow{x} + (u_z v_x - u_x v_z)\overrightarrow{y}$$

FIGURE 11 – Expression analytique du produit vectoriel, par la méthode du γ.

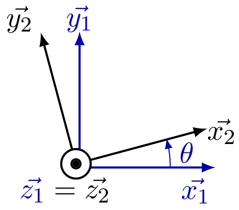
8.4.2 Astuce de calcul

Lorsque les deux termes du produit vectoriel sont deux vecteurs d'une base orthonormée directe (exemple : $\vec{x} \wedge \vec{y}$), on peut facilement calculer le produit vectoriel en utilisant le moyen mnémotechnique suivant :
x u y v z w
(xv - yu) . ez + (yw - zv) . ex + (zu - xw) . ey



8.4.3 Encore une astuce, en utilisant les figures planes

Lorsque les deux termes ne font pas partie de la même base (exemple : $\vec{x_1} \wedge \vec{x_0}$), on peut éviter de projeter $\vec{x_1}$ dans la base b_0 en utilisant la méthode suivante, dite « méthode à trois temps », expliquée sur les deux exemples suivants :



$$\vec{y_1} \wedge \vec{y_2} = ?$$

- Pour aller de $\vec{y_1}$ vers $\vec{y_2}$, on « tourne » autour de $\vec{z_1}$;
- On « tourne » dans le sens positif ;
- L'angle entre les 2 est θ.

$$\vec{y_1} \wedge \vec{y_2} = +\sin\theta.\vec{z_1}$$

$$\vec{y_2} \wedge \vec{x_1} = ?$$

- Pour aller de $\vec{y_2}$ vers $\vec{x_1}$, on « tourne » autour de $\vec{z_1}$;
- On « tourne » dans le sens négatif ;
- L'angle entre les 2 est $\frac{\pi}{2} + \theta$.

$$\vec{y_2} \wedge \vec{x_2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).\vec{z_1} = -\cos\theta.\vec{z_1}$$

Attention

On ne peut utiliser cette méthode que s'il existe une figure plane sur laquelle apparaissent les 2 termes du produit vectoriel. Dans le cas contraire, on n'échappera pas à des calculs de projection.

8.5 Produit mixte

Définition *Produit mixte*

Le produit mixte est la quantité notée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et définie par :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

En géométrie, il permet de calculer le volume d'un parallélépipède.

Le produit mixte se conserve par permutation circulaire :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \Longleftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

Utiliser les propriétés du produit mixte permet parfois de simplifier spectaculairement les calculs (de dynamique, notamment...).

8.6 Dérivation vectorielle

8.6.1 Dérivation directe

Soit un vecteur $\overrightarrow{V}$ repéré dans $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ par $\overrightarrow{V} = x.\vec{x}+y.\vec{y}+z.\vec{z}$. La dérivée temporelle de ce vecteur par rapport au repère R s'écrit :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\right]_R = \frac{dx}{dt}.\vec{x}+x.\left[\frac{d\vec{x}}{dt}\right]_R + \frac{dy}{dt}.\vec{y}+y.\left[\frac{d\vec{y}}{dt}\right]_R + \frac{dz}{dt}.\vec{z}+z.\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_R$$

Les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ étant fixes (*ie* constants au cours du temps) dans le repère R, leurs dérivées sont nulles, donc :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\right]_R = \frac{dx}{dt}.\vec{x}+\frac{dy}{dt}.\vec{y}+\frac{dz}{dt}.\vec{z}$$

Pour simplifier les écritures, en SII on note souvent $\frac{du}{dt}=\dot{u}$, d'où :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\right]_R = \dot{x}.\vec{x}+\dot{y}.\vec{y}+\dot{z}.\vec{z}$$

8.6.2 Dérivation composée

Très souvent en SII, les expressions vectorielles ne sont pas exprimées dans un unique repère (exemple : $\overrightarrow{V} = a.\vec{y_2}+b.\vec{z_1}+c.\vec{x_0}$). La dérivation vectorielle n'est plus aussi aisée. Les étudiants sont souvent tentés de tout projeter dans R_0 avant de dériver, ce qui peut être long et fastidieux (souvent héritée de la mécanique du point vue en Physique). En SII, on privilégiera donc l'utilisation de la formule de dérivation vectorielle (dite « formule de Bour ») :

Définition *Formule de Bour*

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_i} = \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_j} + \overrightarrow{\Omega_{R_j/R_i}}\wedge\vec{u}$$

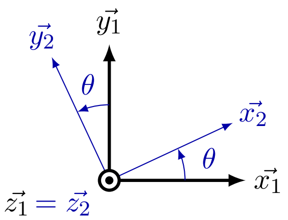
8.6.3 Astuce de calcul avec les figures planes

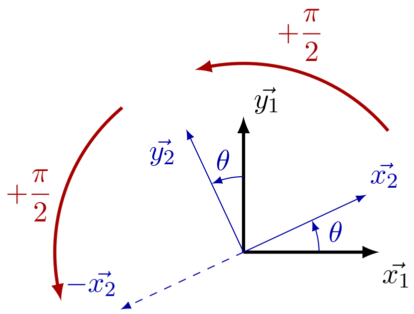
Si on cherche à dériver un vecteur $\vec{u_i}$ dans un repère R_j, et qu'il existe *une même figure plane* sur laquelle $\vec{u_i}$ et R_j apparaissent, alors on peut utiliser la méthode suivante : si on considère la figure plane ci-dessous à gauche, et qu'on souhaite calculer $\left[\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{R_1}$, il faut (ce résultat découle directement de la formule de Bour) :

- faire faire une rotation de $\frac{\pi}{2}$ au vecteur $\vec{x_2}$, ce qui nous donne $\vec{y_2}$;
- multiplier ce vecteur par la dérivée temporelle de l'angle défini sur la figure plane : $\dot{\theta}$.

On trouve alors : $\left[\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{R_1} = \dot{\theta}.\vec{y_2}$

Par la même méthode, la figure ci-dessous à droite donne immédiatement : $\left[\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right]_{R_1} = -\dot{\theta}.\vec{x_2}$





Attention

On ne peut utiliser cette méthode que s'il existe une figure plane sur laquelle apparaissent le vecteur à dériver **et** le repère (ou base) dans lequel on souhaite dériver. Dans le cas contraire, on n'échappera pas là encore à des calculs de projection.

S si

Les liaisons mécaniques

CI.2

SYNTHESE

I. Définition

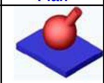
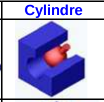
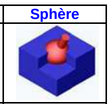
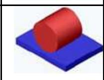
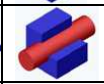
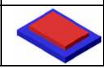
Dans un mécanisme, quand une pièce est en contact avec une autre, il y a entre ces deux pièces une liaison mécanique.

II. Caractéristique des contacts entre solides

On peut distinguer 3 types de contacts entre solides :

- contact **ponctuel**
- contact **linéaire** (la ligne n'est pas forcément une droite)
- contact **surfacique**

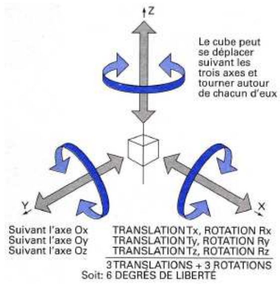
Dans ce cas les surfaces de contact sont le plus souvent : **planes** / **cylindriques** / **sphériques** / **hélicoïdales** / **coniques**.

	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

III. Degrés de liberté

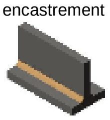
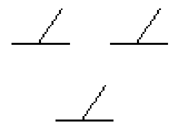
La liaison entre 2 pièces se caractérise par le nombre de **mobilités** que peut avoir l'une des pièces par rapport à l'autre. Ces mobilités (*ou mouvements autorisés*) sont appelés **degrés de liberté**.
Ces degrés de liberté correspondent aux mouvements élémentaires et sont au nombre de **6** :
- 3 translations **Tx Ty Tz**
- 3 rotations **Rx Ry Rz**

La nature d'une liaison mécanique dépend donc de la géométrie du contact (*ponctuel, linéaire, surfacique*) ainsi que du nombre et de la position relative de ces contacts.



0 mobilité

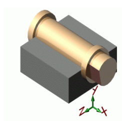
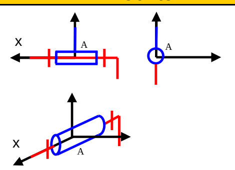
Liaison encastrement

	T	R
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0

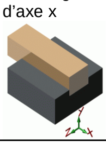
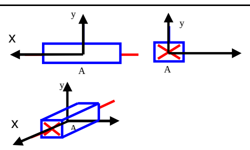
1 mobilité

Liaison pivot d'axe x

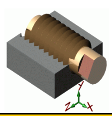
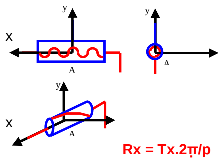
	T	R
X	0	RX
Y	0	0
Z	0	0

Liaison glissière d'axe x

	T	R
X	TX	0
Y	0	0
Z	0	0

Liaison hélicoïdale d'axe x

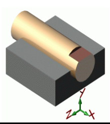
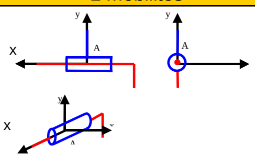
Rx = Tx.2π/p

p=pas

	T	R
X	TX	RX*
Y	0	0
Z	0	0

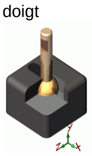
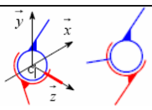
2 mobilités

Liaison pivot glissant d'axe x

	T	R
X	TX	RX
Y	0	0
Z	0	0

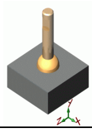
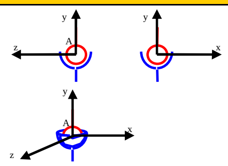
Liaison rotule à doigt

	T	R
X	0	0
Y	0	RY
Z	0	RZ

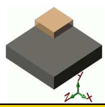
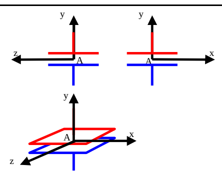
3 mobilités

Liaison rotule

	T	R
X	0	RX
Y	0	RY
Z	0	RZ

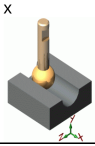
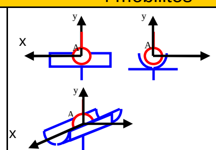
Liaison appui-plan de normale y

	T	R
X	TX	0
Y	0	RY
Z	TZ	0

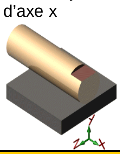
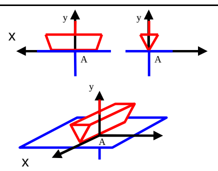
4 mobilités

Liaison sphère cylindre (linéaire annulaire) d'axe x

	T	R
X	TX	RX
Y	0	RY
Z	0	RZ

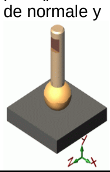
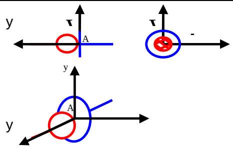
Liaison cylindre plan (linéaire rectiligne), de normale y et d'axe x

	T	R
X	TX	RX
Y	0	RY
Z	TZ	0

5 mobilités

Liaison sphère plan (ponctuelle) de normale y

	T	R
X	TX	RX
Y	0	RY
Z	TZ	RZ