



RAPPELS DE STATIQUE

Cours

v1.1

Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

1	Lois de l'équilibre	2
2	Graphes de liaison et de structure	3
3	Modélisation des actions mécaniques	3
4	Modélisation de la transmission des actions mécaniques	10
5	Isolement d'un système matériel	14
6	Principe fondamental de la statique	15
7	Exemple d'isollements : échelle de pompier	16
8	Méthodes de résolution	18
9	Lois du frottement	20

Introduction

L'objet de ce chapitre traitant de la statique des solides indéformables est de déterminer les actions mécaniques (efforts, moments) transitant dans les liaisons d'un mécanisme en vue de le dimensionner. Nous nous limiterons à la seule détermination de ces actions pour des problèmes isostatiques (solubles). Nous supposerons toujours que les systèmes que nous étudions sont immobiles, d'où le terme « Statique ».

D'ici quelques semaines vous irez un peu plus loin en supposant des solides en mouvement : nous ferons de la « Dynamique » c'est-à-dire que l'on essaiera de trouver le lien entre mouvement et efforts, entre causes et conséquences.

1 Lois de l'équilibre



Définition Terminologie

On appelle *équilibre* un mouvement nul.

On appelle *statique* la branche de la mécanique qui s'intéresse aux états d'équilibre.

On appelle *système matériel* un ensemble d'objets réels.

Dans le cas d'un système matériel quelconque, un mouvement nul se traduit par un champ de vecteurs nuls. Dans le cas d'un solide indéformable, ce mouvement particulier est caractérisé par un torseur cinématique nul.



Définition Équilibre d'un système matériel

Un système matériel Σ est en équilibre par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_f$, si chaque point de ce système matériel conserve une position fixe par rapport à ce référentiel à tout instant.

Dans le cas particulier d'un seul solide $\mathcal{S}$, celui-ci est en équilibre par rapport à ce référentiel $\mathcal{R}_f$, s'il reste immobile par rapport à ce référentiel à tout instant.

Les notions d'équilibres stable, instable ou indifférent peuvent être illustrés en FIGURE 1.

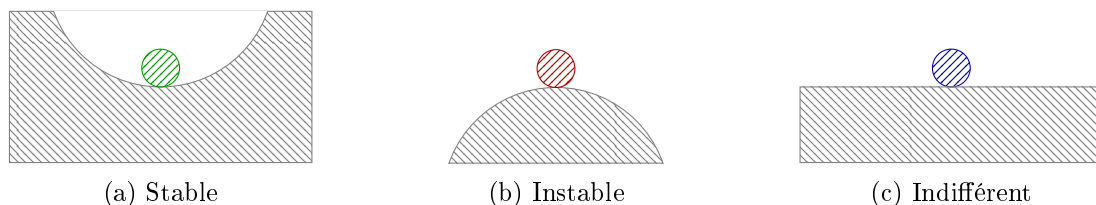


FIGURE 1 – Différents cas d'équilibre.

Lorsque le système matériel Σ est constitué de plusieurs solides indéformables, ce système est dit en équilibre par rapport au référentiel $\mathcal{R}_f$ si tout solide reste fixe par rapport à ce référentiel. Cette condition est vérifiée si les paramètres qui définissent la position des solides par rapport à $\mathcal{R}_f$ sont constants au cours du temps.

2 Graphes de liaison et de structure

Le graphe des liaisons permet de visualiser le ou les isolement(s) à réaliser et permet de rendre systématique la recherche des actions mécaniques extérieures (*c.f.* FIGURE 2).



Définition Graphe de structure

Le graphe de structure correspond au graphe des liaisons auquel on ajoute les actions mécaniques à distance, qui s'appliquent sur chaque solide, les actions des ressorts, des moteurs, ...

On utilise comme convention de représenter un trait pour les forces et deux traits pour les moments.

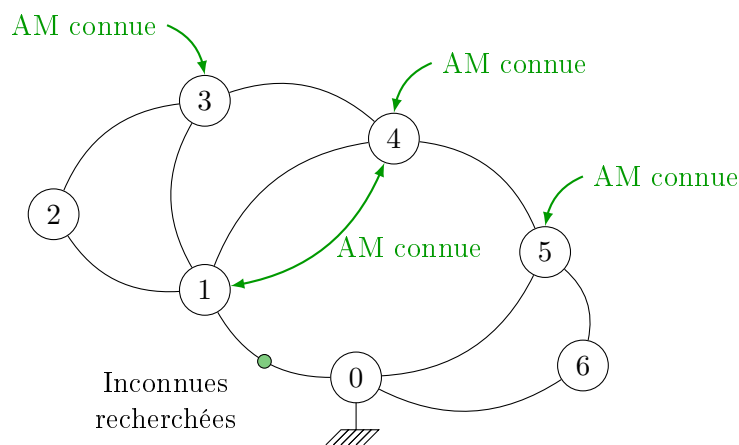


FIGURE 2 – Graphe de structure type d'un système avec actions connues et inconnues

Le bâti (pièce de référence) est toujours bien repéré, pour ne pas l'isoler.

Il est important de savoir repérer si l'action mécanique est interne à un mécanisme :

- un ressort exerce une action mécanique entre deux solides ;
- un fluide externe exerce une action entre deux solides ;
- dans un moteur constitué d'un rotor et d'un stator, l'effet magnétique génère un moment sur le rotor et un moment opposé sur le stator (on a donc bien une action mécanique entre deux solides).

La pesanteur est une action extérieure à chaque solide.

3 Modélisation des actions mécaniques

Pour savoir si un bagage inconnu est lourd, le plus simple est de le prendre et de le soulever. Si cette opération est facile, on dira qu'il est léger. Dans le cas contraire, on dira qu'il est lourd. Ainsi :

- sans tentative de mise en mouvement, personne ne peut formuler d'avis ;
- la mise en mouvement est faite dans la direction de la pesanteur ;
- l'évaluation du poids se fait par corrélation entre le mouvement généré ou empêché et l'énergie mise en œuvre pour cela ;

- la mise en mouvement ou le maintien en position résulte donc d'une dépense d'énergie.

Il n'existe pas de capteur pour des *mesures directes* d'efforts. Les différentes technologies exploitent des *déplacements induits* par la déformation de ressorts, de jauges de déformation ou de cellules piézoélectriques.



Définition Action mécanique

- On appelle *action mécanique* tout phénomène susceptible de déplacer un corps, de le déformer (**Hors-programme**) ou de le maintenir en équilibre.
- Une *action mécanique* est un concept construit par dualité avec la cinématique, pour simuler et expliquer déformations et mouvements, pour dimensionner les composants.



À retenir

On ne détecte une action mécanique que par les effets qu'elle produit !

On distingue deux grandes familles d'actions mécaniques suivant leur mode d'action :

- **Actions mécaniques de contact** : on retrouve ce type d'actions dans toutes les actions entre solides et entre un fluide et un solide. Ces actions agissent sur la surface du solide.
- **Actions mécaniques à distance** : les actions mécaniques à distance caractérisent les actions mécaniques transmises sans contact et agissant principalement sur tout le volume du solide. Les actions à distance sont principalement dues à l'effet de la gravité sur les corps, mais on retrouve aussi ce type d'action avec les phénomènes électromagnétiques.

Une action mécanique est composée d'une force représentée par un vecteur (direction, sens, longueur) exprimée en Newton (N).

On appelle résultante d'une force volumique, surfacique ou linéique la force totale générée par l'ensemble des forces sur le volume, la surface ou la ligne considérés.

3.1 Action mécanique volumique



Définition Action mécanique volumique

Une action mécanique volumique $d\vec{F}$ est une force par unité de volume et s'exprime en $N.m^{-3}$ issue généralement de l'attraction gravitationnelle ou de forces électromagnétiques.

On la note souvent $f(P)$ et elle possède une direction $\vec{u}(P)$ en tout point P de coordonnées (x, y, z) tel que :

$$d\vec{F} = f(P)\vec{u}(P)dV$$

Soit un volume V quelconque, on peut calculer la résultante F de l'action volumique :

$$\vec{F} = \int_V d\vec{F} = \int_V f(P)\vec{u}(P)dV$$

Si la direction $\vec{u}$ et la valeur f de l'effort volumique étudié sont constants sur le volume, on a :

$$\vec{F} = fV\vec{u}$$

3.2 Action mécanique surfacique



Définition *Action mécanique à contact surfacique*

Une action mécanique surfacique $d\vec{F}$ est une action mécanique par unité de surface et s'exprime en $N.m^{-2}$ ou Pa (Pascal). Elle est associée à un contact entre deux solides ou entre un solide et un fluide.

On la note souvent $p(P)$ telle que :

$$d\vec{F} = -p(P)d\vec{S}$$

$p(P)$ est appelé « pression en P ».

$d\vec{S}$ est un vecteur de norme dS , élément de surface autour du point P et de direction $\vec{n}(P)$, vecteur normal sortant de la surface du corps étudié :

$$d\vec{S} = dS\vec{n}(P)$$

Soit une surface S quelconque, on peut calculer la résultante F de l'action surfacique :

$$\vec{F} = \int_S (-p(P)d\vec{S}) = - \int_S p(P)d\vec{S}$$

Si la direction $\vec{n}$ est constante (surface plane) et la valeur p de la pression aussi, on a :

$$\vec{F} = -pS\vec{n}$$



Remarque

1 bar = 10^5 Pa

3.3 Action mécanique linéique



Définition *Action mécanique à contact linéique*

Une action mécanique linéique ($k(P)$ en $N.m^{-1}$) est une action mécanique par unité de longueur et s'exprime en $N.m^{-1}$. Elle est le résultat :

- Soit d'un modèle de contact entre deux solides indéformables
- Soit d'une simplification d'une action mécanique surfacique ou volumique pour traiter un modèle simplifié.

On la note souvent $k(P)$ telle que :

$$d\vec{F} = -k(P)\vec{dl}$$

$\vec{dl} = dl\vec{n}(P)$, dl étant un élément de longueur autour du point P et $\vec{n}(P)$ la normale sortante en P . La résultante vaut alors :

$$\vec{F} = \int_{\Gamma} d\vec{F} = - \int_{\Gamma} k(P)\vec{n}(P)dl$$

Si la direction $\vec{n}$ est constante (droite) et la valeur k de la répartition aussi, on a sur un segment de longueur L :

$$\vec{F} = -kL\vec{n}$$



Remarque

Une action mécanique linéique n'existe pas dans la réalité car il n'existe pas de solides indéformables, et tout contact s'établit sur une petite surface par l'intermédiaire d'une pression. Un modèle linéique induit la présence (fausse) d'une pression infinie au contact, mais permet toutefois de rendre compte de l'effet de l'action mécanique concernée. Si la pression au contact est recherchée, on pourra alors étudier le contact au niveau local (théorie de Hertz) connaissant l'action mécanique qui transite.

3.4 Action mécanique ponctuelle



Définition *Action mécanique à contact ponctuel*

Une action mécanique ponctuelle est une action mécanique « simple », qui est le résultat :

- Soit d'un modèle de contact entre deux solides indéformables
- Soit d'une simplification d'une action mécanique linéique, surfacique ou volumique pour traiter un modèle simplifié dans lequel on fait apparaître de simples actions mécaniques plutôt que leur répartition



Remarque

La remarque pour le contact linéique est aussi valable dans le cas de l'action mécanique ponctuelle qui n'existe pas dans la réalité.

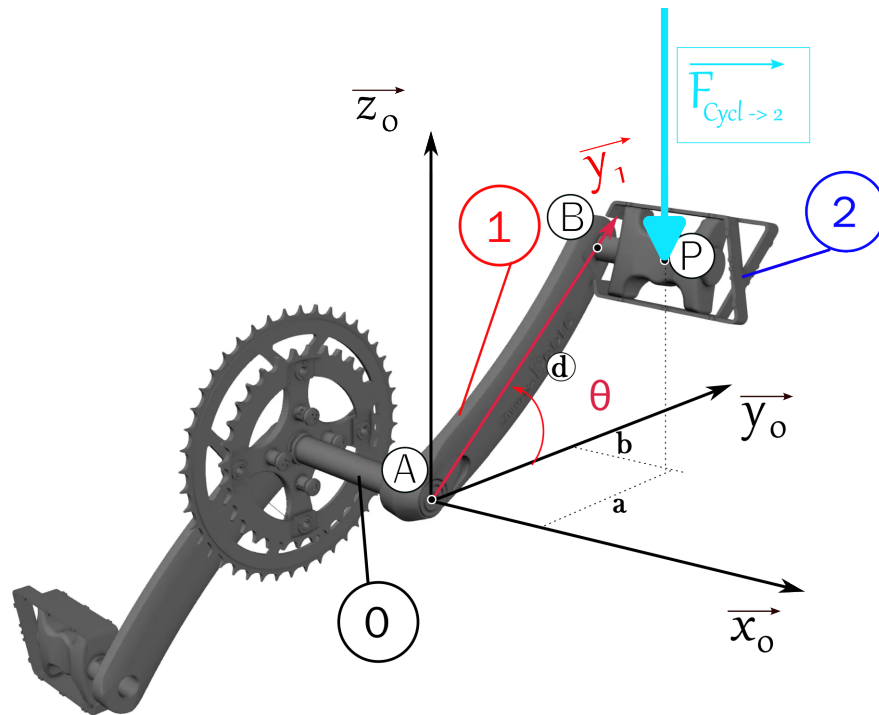
3.5 Moment d'une action mécanique



Définition "à la main"

Le moment d'une force par rapport à un point donné ou à un axe est une grandeur physique traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour du point ou de l'axe.

Je sais je sais, j'abuse avec le vélo. Toutefois, c'est un excellent support de compréhension pour la mécanique. Considérons l'effort exercé par les cuisses musclées de notre cycliste sur la pédale :



Ainsi, l'action du pied sur la pédale $\overrightarrow{F_{cycl \rightarrow 2}}$ en P ne suffit pas pour décrire le mouvement de rotation de la pédale.



Définition Moment d'une force

On appelle moment en A de l'action $\overrightarrow{F_{i \rightarrow j}}$ exercée en la quantité

$$\overrightarrow{M_{A, F_{i \rightarrow j}}} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \quad [\text{Nm}]$$

Ce vecteur permet de définir l'effet de l'action mécanique à distance du point d'application.



Remarque

Cette quantité s'exprime en $N.m$: c'est un couple. Le quiproquo entre couple et moment vient de là.

**TODO**

Calculer le moment de l'action du pied sur la pédale au point A

Pour l'exemple du pédalier, on trouve

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{A,F_{cycl \rightarrow 2}}} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \wedge -F_{p \rightarrow 2} \overrightarrow{z_0} \\ &= (d \cdot \overrightarrow{y_1} + b \cdot \overrightarrow{x_0}) \wedge -F_{cycl \rightarrow 2} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &= -d \cdot \cos \theta \cdot F_{cycl \rightarrow 2} \cdot \overrightarrow{x_0} + b \cdot F_{cycl \rightarrow 2} \cdot \overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$

La composante du moment en projection sur $\overrightarrow{x_0}$ représente l'action mécanique qui va entraîner la pédale en rotation autour de l'axe du pédalier, l'autre à tendance à « tordre » la pédale autour de l'axe $(A, \overrightarrow{y_0})$.

**Remarque**

Par définition le moment d'une action ponctuelle en son point d'application est nul.

3.6 Torseur des actions mécaniques

On vient de voir qu'une action mécanique doit être représentée à la fois par sa résultante $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$ et son moment $\overrightarrow{M_{A,R_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$, où P est le point d'application de la résultante et A le point où on cherche à connaître l'action mécanique.

Par définition, pour une action ponctuelle en son point d'application le moment est nul :

$$\overrightarrow{M_{P,R_{1 \rightarrow 2}}} = \overrightarrow{0}$$

**TODO**

On cherche une relation entre le moment d'une action mécanique en deux points, A et B .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{A,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}\end{aligned}$$

en introduisant le point A dans la seconde relation :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B,R_{1 \rightarrow 2}}} &= \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}\end{aligned}$$

Finale

$$\overrightarrow{M_{B,R_1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{M_{A,R_1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$$

On reconnaît la relation caractéristique d'un champ de vecteurs equiprojectif, ce champ est un champ caractéristique d'un torseur.



À retenir

On peut donc décrire une action mécanique à partir d'un torseur, le torseur des actions mécaniques.



Définition Torseur des actions mécaniques

On appelle *torseur des actions mécaniques* exercées par un objet i sur un objet k , le torseur construit par dualité avec la cinématique, pour exprimer la puissance développée lors d'un mouvement i/k .

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow k}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{i \rightarrow k}} \\ \overrightarrow{M_{A,i \rightarrow k}} \end{array} \right\}_A$$

Le vecteur résultante $\overrightarrow{F_{i \rightarrow k}}$ et le vecteur moment $\overrightarrow{M_{A,i \rightarrow k}}$, sont les éléments de réduction de ce torseur au point A .

3.6.1 Changement de point



Propriété

Relation de Varignon (méthode « BABAR ») pour le torseur des actions mécaniques.

Le champ moment des actions mécaniques dans un solide indéformable soumis à des actions mécaniques se construit à partir de la formule de changement de points :

$$\forall i/j, \forall A \text{ et } \forall B, \quad \overrightarrow{M_{B,i \rightarrow j}} = \overrightarrow{M_{A,i \rightarrow j}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}}$$



Remarque

C'est la... « BABAF »

3.7 Action mécanique extérieure et intérieure



Définition Action mécanique extérieure et intérieure

Soit Σ un système matériel quelconque. On appelle $\bar{\Sigma}$, l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à ce système.

On appelle *action mécanique extérieure* à un système Σ , une action mécanique d'un élément de $\overline{\Sigma}$ sur un des éléments de Σ . Le torseur des actions mécaniques extérieurs à un système quelconque Σ possédant n actions mécaniques extérieures, est noté :

$$\{\mathcal{T}_{\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \sum_{k=0}^n \{\mathcal{T}_{k \rightarrow \Sigma}\}$$

On appelle *action mécanique intérieure* à un système Σ , une action mécanique entre deux éléments de Σ . Le torseur des actions mécaniques intérieures à un système quelconque Σ d'un solide i sur un solide j , est noté :

$$\forall i \in \Sigma, \forall j \in \Sigma, \quad \{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\}$$

4 Modélisation de la transmission des actions mécaniques

La forme du torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison usuelle est connue, dans le cas où l'on ne tient pas compte du phénomène de frottement (hypothèse de liaison parfaite). En l'absence de frottement, la puissance dissipée par effet Joule au niveau de la liaison est supposée nulle.



Définition *Puissance développée au niveau d'une liaison*

La puissance développée au niveau de la liaison entre deux solides 1 et 2 s'écrit :

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} \end{array} \right\}_A$$

Une puissance nulle revient à une somme nulle de deux produits scalaires indépendants :

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = 0$$

On en déduit la forme duale des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées sans frottement :

- pour chaque degré de liberté supprimé, on pose une inconnue scalaire d'actions mécaniques transmissibles ;
- réciproquement, aucune composante d'action mécanique n'est transmissible là où une composante de mouvement est possible.

Cas particuliers de la modélisation plane

Sous certaines conditions de mouvement plan, il est possible de simplifier les torseurs cinématiques associés aux modèles cinématiques des liaisons. Dans le cas d'un mouvement plan de normale $\vec{x}$, seules les vitesses selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$ et la vitesse angulaire selon $\vec{x}$ sont non nulles. Le torseur cinématique ne

comporte alors que trois composantes « utiles » $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{cc} p_{21} & 0 \\ 0 & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{array} \right\}_M \end{array}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$.

Cette simplification est également possible pour les actions mécaniques transmissibles dans les liaisons. Seules trois composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison seront

« utiles » : $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} \begin{matrix} \left(\begin{array}{cc} -- & L_{12} \\ Y_{12} & -- \\ Z_{12} & -- \end{array} \right)_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{matrix} \end{matrix}$.

Les composantes ignorées sont notées par un trait « -- ». Elles ne sont pas obligatoirement nulles mais leurs valeurs n'influencent pas sur la résolution du problème plan étudié.

Cette forme du torseur des actions transmissibles peut se justifier par deux approches :

- La première est liée aux mouvements. Il est possible d'analyser les actions mécaniques comme une entité qui va empêcher un mouvement possible du mécanisme étudié. Pour s'opposer à une rotation d'axe $(A, \vec{x})$, il faut appliquer un couple selon $\vec{x}$. Pour interdire les déplacements selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$, il faut appliquer des forces selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Cette approche n'est pas nécessairement intuitive lorsque rien ne bouge réellement...
- La seconde est liée aux actions mécaniques. Dans le cas particulier de symétrie de la géométrie du mécanisme et de symétrie des actions mécaniques par rapport à un plan, par exemple $(O, \vec{y}, \vec{z})$, il est possible de montrer que le torseur des actions transmissibles s'écrit sous la forme proposée (la FIGURE 3 illustre ces propos dans le cas d'actions mécaniques surfaciques).

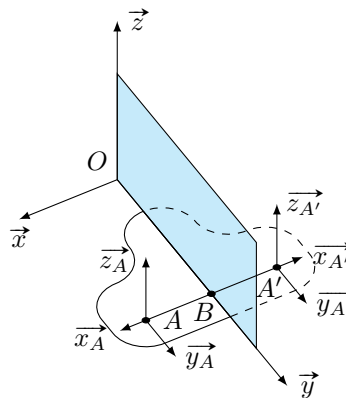


FIGURE 3 – Cas particulier d'une action mécanique surfacique possédant un plan de symétrie pour la géométrie et les actions mécaniques.

Dans ces conditions (symétrie de la géométrie du mécanisme et des actions mécaniques) le torseur

des actions mécaniques est de la forme $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} \begin{matrix} \left(\begin{array}{cc} -- & L_{12} \\ Y_{12} & -- \\ Z_{12} & -- \end{array} \right)_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{matrix} \end{matrix}$ avec M un point du plan de symétrie.

Les termes habituellement marqués par un trait « -- » sont rigoureusement nuls. La modélisation plane n'est donc pas une approximation dans ce cas particulier, mais juste une simplification de l'écriture du torseur des actions mécaniques transmissibles.

Lorsque la modélisation plane des actions mécaniques est invoquée en dehors des cas de symétrie énoncés précédemment, il s'agit alors d'une hypothèse. On suppose (ou par expérience, on sait) que les actions mécaniques non recherchées n'interviennent pas dans la résolution du problème étudié.

Le nombre d'inconnues est limité à trois au maximum par torseur d'actions mécaniques de liaison.

Exemple:**Cas d'une liaison pivot**

Le torseur d'action mécanique d'une liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ dans le cadre d'une étude plane de normale $\vec{x}$ (plan de symétrie $(\vec{y}, \vec{z})$) s'écrit :

$$\forall M \in (A, \vec{x}) \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \underbrace{\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}}_{\text{modélisation spatiale}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -- & 0 \\ Y_{12} & -- \\ Z_{12} & -- \end{Bmatrix}}_{\text{modélisation plane de normale } \vec{x}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

La modélisation plane conduit à un torseur glisseur d'axe central $(A, \vec{x})$. L'action mécanique est donc modélisable par une force en tout point de cet axe.

Exemple:**Cas d'une liaison cylindre-plan**

Le torseur d'action mécanique d'une liaison cylindre-plan de droite de contact $(A, \vec{x})$ et de normale $\vec{z}$ dans le cadre d'une étude plane de normale $\vec{x}$ s'écrit :

$$\forall M \in \text{plan}(A, \vec{x}, \vec{z}) \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}}_{\text{modélisation spatiale}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -- & 0 \\ 0 & -- \\ Z_{12} & -- \end{Bmatrix}}_{\text{modélisation plane de normale } \vec{x}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Avec l'hypothèse de modélisation plane des actions mécaniques, le torseur des actions mécaniques de la liaison cylindre-plan a la même forme que celui d'une liaison sphère-plan (ponctuelle).

**Remarque**

Seules trois formes de torseurs d'actions mécaniques sont utilisées en modélisation plane.

Glissière direction $\vec{y}$	Articulation ou pivot plane (glisseur)	Ponctuelle plane de normale $(M, \vec{z})$
$M \begin{Bmatrix} -- & L_{12} \\ 0 & -- \\ Z_{12} & -- \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$M \begin{Bmatrix} -- & 0 \\ Y_{12} & -- \\ Z_{12} & -- \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$M \begin{Bmatrix} -- & 0 \\ 0 & -- \\ Z_{12} & -- \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Nom de la liaison	Translation	Rotation	Degrés de liberté	Schématisation dans l'espace	Torseur statique $\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} \end{matrix} \right\}_A$ $\beta = \text{base } \beta(x, y, z)$	Torseur cinématique $\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{A \in 2/1} \end{matrix} \right\}_A$ $\beta = \text{base } \beta(x, y, z)$
Encastrement	0 0 0	0 0 0	0		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ torseur nul
Pivot d'axe (A, z)	0 0 0	0 0 Rz	1		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ $\forall P \in (A, \vec{z})$ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{z}), \beta$
Glissière de direction $\vec{z}$	0 0 Tz	0 0 0	1		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & N_{21} \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{z21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\forall P \in (A, \vec{z})$ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_{z21} \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{z}), \beta$
Hélicoïdale d'axe (A, z) et de pas p	0 0 Tz	0 0 Rz	1		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{matrix}$ avec $N_{21} = \frac{p}{2\pi} \cdot Z_{21}$ si rendement = 100 %	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{V}_{z21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\forall P \in (A, \vec{z}), \beta$ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{z}), \beta$ avec $V_{z21} = \frac{p}{2\pi} \cdot \omega_{z21}$
Pivot glissant d'axe (A, z)	0 0 Tz	0 0 Rz	2		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{V}_{z21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\forall P \in (A, \vec{z})$ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{z}), \beta$
Sphérique à doigt (ou rotule à doigt) d'axes (A, x) et (A, z)	0 0 0	Rx 0 Rz	2		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ M_{21} \vec{y} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} \omega_{x21} & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{z}), \beta$
Sphérique (ou rotule) de centre A	0 0 0	Rx Ry Rz	3		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} \omega_{x21} & \omega_{y21} & \omega_{z21} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{z}), \beta$
Appui plan (ou plan-plan) de normale $\vec{y}$	Tx 0 Tz	0 Ry 0	3		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} Y_{21} \vec{y} \\ L_{21} \vec{x} + N_{21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} 0 & L_{21} \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & N_{21} \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{y21} \vec{y} \\ \vec{V}_{x21} \vec{x} + \vec{V}_{z21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} 0 & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ 0 & V_{z21} \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{y}), \beta$
Cylindre-plan (ou linéaire rectiligne) d'axe (A, z) et de normale $\vec{y}$	Tx 0 Tz	0 Ry Rz	4		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} Y_{21} \vec{y} \\ L_{21} \vec{x} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} 0 & L_{21} \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{V}_{x21} \vec{x} + \vec{V}_{z21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} 0 & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{y}), \beta$
Sphère-cylindre (ou linéaire annulaire) de centre A et d'axe (A, z)	0 0 Tz	Rx Ry Rz	4		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{V}_{x21} \vec{x} + \vec{V}_{z21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} \omega_{x21} & \omega_{y21} & \omega_{z21} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{y}), \beta$
Sphère-plan (ou pontuelle) de point de contact A et de normale $\vec{y}$	Tx 0 Tz	Rx Ry Rz	5		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} Y_{21} \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\{\theta_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{V}_{x21} \vec{x} + \vec{V}_{z21} \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$ $\begin{matrix} \omega_{x21} & \omega_{y21} & \omega_{z21} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ $\forall P \in (A, \vec{y}), \beta$

5 Isolement d'un système matériel

5.1 Frontière d'isolement

On considère un ensemble matériel Σ quelconque (ensemble de solides, solide seul). On délimite l'ensemble par une frontière. Tout ce qui est en dehors de cette frontière est appelé « milieu extérieur de Σ » et est noté $\bar{\Sigma}$.

La définition de la frontière d'isolement est indispensable avant toute étude, elle permet d'identifier les actions mécaniques s'exerçant sur le système considéré.



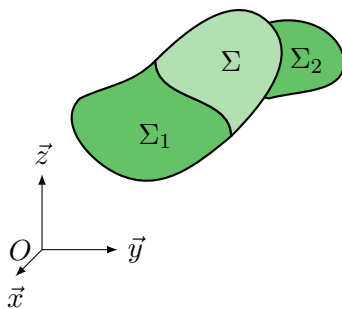
Attention

on n'isole jamais le bâti !

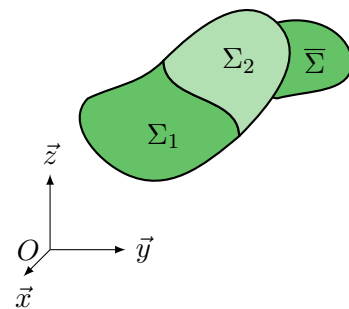
En effet, le bâti étant le référentiel galiléen, à l'échelle du système industriel étudié, il est très difficile de connaître les actions qui s'exercent sur celui-ci.

5.2 Inventaire des actions mécaniques

Le milieu extérieur $\bar{\Sigma}$ agit sur l'ensemble Σ par des actions *surfiques* de contact ou *volumique* à distance. On note $\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\}$ l'ensemble des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ . Plusieurs cas peuvent alors se présenter :



(a) Deux systèmes matériels Σ_1 et Σ_2 agissent sur Σ .



(b) Deux systèmes matériels Σ_1 et Σ_2 agissent sur $\bar{\Sigma}$.

FIGURE 4 – Isolements

Si deux systèmes Σ_1 et Σ_2 disjoints, agissent sur Σ ($\bar{\Sigma} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, c.f. FIGURE 4a), alors :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma}\} + \{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma}\}$$

Si Σ est constitué de deux éléments ($\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, c.f. FIGURE 4b), alors :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1}\} + \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2}\}$$

Pour déterminer les actions mécaniques, on extrait l'ensemble isolé et on recense pour chaque solide :

- les actions mécaniques de contact *avec l'extérieur* ;

- les actions mécaniques à distance exercées *par l'extérieur*.

On parle d'inventaire (ou bilan) des actions mécaniques extérieures (IAME ou BAME).

Les actions mécaniques intérieures à un système matériel Σ sont l'ensemble des actions mécaniques mutuelles entre les différents sous ensembles de Σ . Elles n'interviennent pas dans ce bilan.

6 Principe fondamental de la statique

6.1 Équilibre d'un solide indéformable



Définition *Équilibre d'un solide indéformable*

Soit un solide indéformable S dont on constate ou on souhaite l'équilibre dans un référentiel galiléen R_g . Le torseur des actions mécaniques extérieures au solide S est à chaque instant le torseur nul.

$$\forall t, \{\mathcal{V}_{S/R_g}\} = \{0\} \Rightarrow \forall t, \{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \{0\}$$

La réciproque est fausse. *Exemple : paire de ciseaux*

6.2 Énoncé



Définition *Principe fondamental de la statique*

Si un système mécanique Σ est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors la somme des actions mécaniques de l'extérieur sur Σ est nulle :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \{0\}$$

Il est important de bien voir que le PFS est une implication (si ... alors ...). Ce n'est qu'un cas particulier du principe fondamental de la dynamique, dans le cas où l'accélération est nulle, donc la vitesse constante, elle peut donc être constamment nulle (*immobilité*) ou constamment non nulle (*mouvement de translation uniforme au cours du temps*).



Remarque

C'est bien une implication, réfléchissez à une paire de ciseaux. La condition $\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \{0\}$ appliquée à un ensemble de solides n'implique pas que l'ensemble est en équilibre. Ex : Pour une paire de ciseaux, le torseur des actions mécaniques extérieures sur la paire de ciseaux est nul mais les ciseaux s'ouvrent.

6.3 Résolution d'un problème de statique

Pour résoudre un problème de statique, il n'est pas toujours nécessaire de vérifier l'ensemble du PFS.

**Propriété**

En effet, l'écriture torsorielle revient à poser deux équations vectorielles :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} &= \{0\} \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}} \\ M_A(\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}}) \end{array} \right\}_A &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \end{aligned}$$

L'équation de la résultante statique : $\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}} = \vec{0}$

L'équation du moment statique en A : $M_A(\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}}) = \vec{0}$

**Remarque**

On parle du théorème de la résultante statique et du théorème du moment statique en un point donné. On peut ainsi obtenir six équations scalaires.

7 Exemple d'isollements : échelle de pompier

Il s'agit d'étudier l'équilibre d'un système, soumis à deux ou trois forces (torseurs glisseurs). Dans de nombreuses situations, une étude plane des actions mécaniques peut être menée. Dans ces conditions, les actions mécaniques transmissibles dans les liaisons ponctuelles ou pivot, sont des torseurs glisseurs.

Prenons comme exemple, le mécanisme suivant (*c.f.* FIGURE 5).

7.1 Graphe de structure

La première étape consiste à réaliser le graphe de structure.

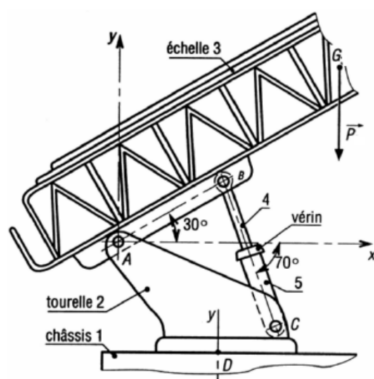
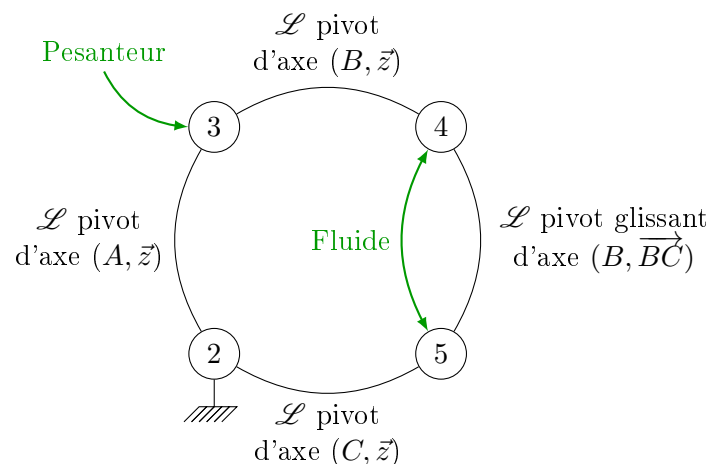


FIGURE 5 – Schéma structurel : échelle de pompier



7.2 Système soumis à deux torseurs glisseurs



Propriété

PFS soumis à deux torseurs glisseurs

Si un solide à l'équilibre est soumis à deux glisseurs en A et B, alors celles-ci sont de même directions, de même normes et de sens opposé. De plus, la direction est selon la droite (AB), passant par les points d'application des deux résultantes.



TODO

Démonstration en isolant l'ensemble {4 + 5} en modélisation plane (de normale $\vec{z}$).

L'application du Principe Fondamental de la Statique conduit à :

- équation de résultante : $\vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}$;
- équation de moment en B : $\vec{0} + \vec{BC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0}$.

Le support de $\vec{F}_C$ est la droite (BC) et $\vec{F}_B = -\vec{F}_C$. Il peut être intéressant de commencer par isoler les ensembles de solides soumis à deux AME du type glisseur car le support de ces forces peut alors être immédiatement identifié.

7.3 Système soumis à trois torseurs glisseurs



Propriété

PFS soumis à trois torseurs glisseurs

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de trois glisseurs $\vec{F}_L$ en L, $\vec{F}_M$ en M et $\vec{F}_N$ en N, ces forces sont coplanaires, concourantes ou parallèles et leur somme vectorielle nulle.



TODO

Démonstration en isolant l'ensemble {3} en modélisation plane.

L'application du principe fondamental de la statique conduit à :

- équation de résultante : $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$.
- équation de moment en G : $\vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B + \vec{GG} \wedge \vec{F}_G = \vec{0}$.

Ce qui s'écrit : $\underbrace{\vec{GA} \wedge \vec{F}_A}_{\vec{V}} + \underbrace{\vec{GB} \wedge \vec{F}_B}_{\vec{W}} = \vec{0}$. Donc : $\vec{V} = -\vec{W}$.

Par propriété du produit vectoriel, $\vec{V}$ est $\perp$ au plan $(\vec{F}_A, A, G)$ mais également au plan $(\vec{F}_B, B, G)$ (car $\vec{V} = -\vec{W}$). Les deux plans $(\vec{F}_A, A, G)$ et $(\vec{F}_B, B, G)$ sont donc parallèles et, comme ils possèdent un point commun C, ils sont confondus. Les forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ appartiennent donc au plan (A, B, G) et comme $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$, les trois forces sont coplanaires au plan (A, B, G) .

Deux cas sont à étudiés :

- Deux de ces forces ($\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$) sont sécantes en un point I , cela conduit à l'équation :

$$\underbrace{\vec{IA} \wedge \vec{F}_A}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{IB} \wedge \vec{F}_B}_{\vec{0}} + \vec{IG} \wedge \vec{F}_G = \vec{0}$$

Le support de $\vec{F}_G$ passe donc également par le point I . Les trois forces sont concourantes et leur somme vectorielle est nulle.

- Deux de ces forces ($\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$) sont parallèles, alors la troisième force $\vec{F}_G$ est parallèle aux deux premières car : $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$. Elles doivent encore vérifier que la somme des moments est nulle.

8 Méthodes de résolution

Soit un système constitué de plusieurs solides en liaison et soumis à des actions mécaniques extérieures. L'objectif d'une étude statique des solides est de déterminer les équations liant les actions mécaniques s'exerçant sur chaque solide. Plusieurs types de problèmes peuvent alors être posés :

- dimensionner le mécanisme (*déterminer si les liaisons vont résister*). On souhaite donc connaître toutes les actions mécaniques dans les liaisons ainsi que les actions mécaniques extérieures inconnues ;
- seules les actions mécaniques extérieures sont recherchées en fonction d'actions mécaniques connues.

8.1 Méthode systématique



Méthode systématique

La méthode systématique consiste à isoler chaque solide individuellement, de façon à écrire la totalité des équations disponibles (*c.f.* l'exemple du micro-compresseur). Pour chaque isolement, la démarche est la même :

1. Isoler chaque solide, sauf le bâti ;
2. Établir l'inventaire des actions mécaniques extérieures (IAME) : ce point est particulièrement attendu dans la rédaction d'un isolement (et donc obligatoire) ;
3. Écrire le PFS pour chaque solide ;
4. Réduire en un point quelconque les torseurs d'actions mécaniques ;
5. Projeter sur une base quelconque pour obtenir un système d'équations scalaires à résoudre.



Attention

Cette méthode est systématique, mais très longue, puisqu'il faut tout écrire pour résoudre le système d'équations. Elle n'est à utiliser que si l'énoncé demande explicitement de tout trouver.

Avant de commencer la résolution, il est possible d'établir un premier bilan du nombre d'équations et d'inconnues du système :

- $6 \times N_S$ équations scalaires (N_S : nombre de solides qu'il est possible d'isoler) en trois dimensions ou $3 \times N_S$ en modélisation plane ;

- I_S inconnues (I_S : nombre d'inconnues dans les torseurs d'actions mécaniques).

Si $I_S \leq 6 \times N_S$ (ou $3 \times N_S$), alors peut-être que le problème possède une solution. *La théorie des mécanismes permettra de savoir à coup sûr si la résolution est possible.*



Remarque

Il s'agit ici d'un aparté préparant à la théorie des mécanismes, au programme de PSI - PTSI/PT - TSI. C'est l'étude des mécanismes et notamment de l'aspect "solvable" ou non du système d'équations.

8.2 Méthode intuitive - Stratégie de résolution

Une méthode plus intuitive, peut être très efficace pour celui qui possède une vision plus fine du système, car bien souvent, il n'est pas nécessaire de déterminer la totalité des inconnues.

Lorsque seules quelques inconnues d'actions mécaniques sont recherchées, il faut écrire le minimum d'équation permettant de relier ces inconnues aux données, autant que possible, sans faire intervenir les inconnues non recherchées.

Il s'agit alors d'analyser les actions mécaniques dans le mécanisme, à partir des mouvements permis par les liaisons (mobilités qui annulent certaines composantes d'efforts dans les liaisons) et d'identifier les efforts qui *travaillent*.

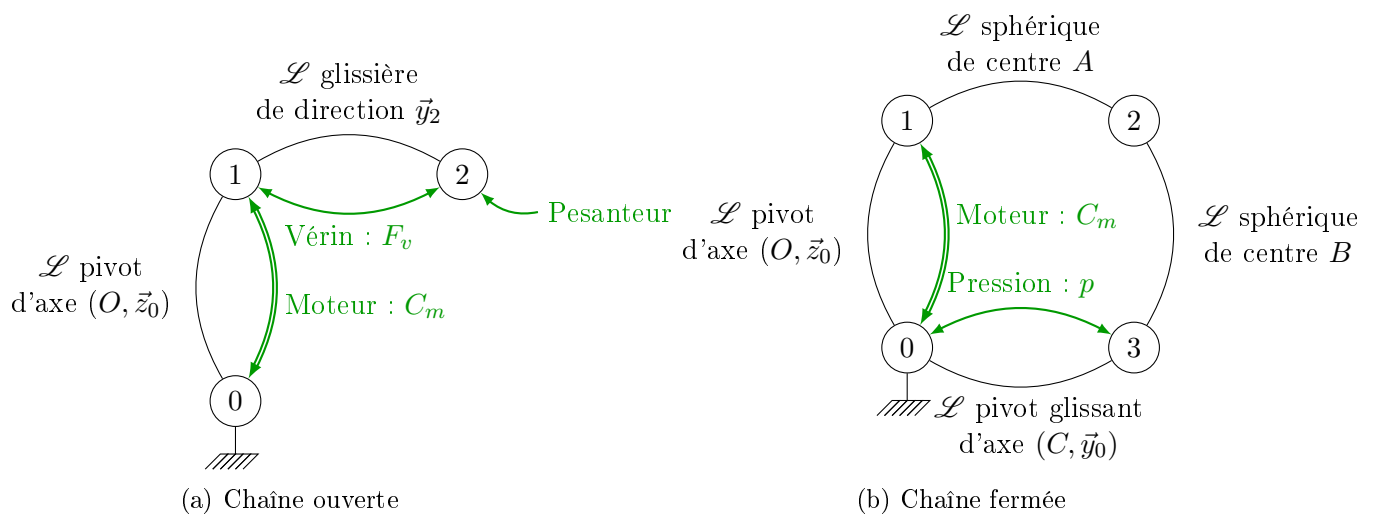


FIGURE 6 – Exemples de graphes de structures

Il n'y a rien de systématique par cette méthode, mais deux points sont à retenir pour élaborer une stratégie de résolution :

- repérer rapidement les solides soumis à deux forces : leur isolement doit pouvoir conduire à des simplifications utiles sur les actions mécaniques, identifiables sans même écrire le PFS ;
- suivant le type de chaîne :
 - pour une chaîne fermée, dans le cas des liaisons avec le bâti, écrire les équations du PFS sur les mobilités de ces liaisons, permet de déterminer comment les efforts se transmettent dans le mécanisme ;

- pour une chaîne ouverte, l'isolement de l'ensemble des solides allant de la partie ouverte du mécanisme, jusqu'à l'actionneur que l'on souhaite dimensionner, permettra de déterminer le résultat en une seule équation.

**Méthode intuitive** *Cas d'une chaîne ouverte*

Dans l'exemple de la FIGURE 6a, la stratégie est la suivante :

- l'isolement de $\{1 + 2\}$ permet de déterminer le couple moteur C_m , par utilisation de l'équation du moment statique au point O , en projection sur $\vec{z}_0$;
- l'isolement de $\{2\}$ permet de déterminer la force dans le vérin F_v par utilisation de l'équation de la résultante statique en projection sur $\vec{y}_2$.

**Méthode intuitive** *Cas d'une chaîne fermée*

Dans l'exemple de la FIGURE 6b, la stratégie est la suivante :

- La pièce **2** étant soumise à deux forces, il est possible de déduire sans calculs que ces forces sont de même norme, même direction et de sens opposés. Elles s'expriment donc en fonction d'une unique variable T , qui correspond à la norme de chacune des forces ;
- La pièce **3** étant en liaison pivot glissant d'axe $(C, \vec{y}_0)$ avec la pièce **0** (le bâti), seules les équations de moment et résultante statique sur $\vec{y}_0$ ne font pas intervenir d'inconnue de liaison de **0** sur **3**. La force T et la pression p travaillent uniquement dans le mouvement de translation suivant $\vec{y}_0$ pour déterminer T en fonction de la pression p ;
- Pour trouver la relation entre le couple moteur C_m qui s'applique sur l'arbre **1** et la norme T de l'action mécanique de **2** sur **1**, il faut isoler l'arbre **1** et utiliser l'équation du moment statique (car on cherche une relation sur le couple C_m). On utilise alors la mobilité de la liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$, soit le théorème du moment statique écrit au point O , en projection sur $\vec{z}_0$ qui donnera la relation entre C_m et T .

9 Lois du frottement

**Définition** *Notion d'adhérence et frottement.*

- Le frottement ou l'adhérence sont des phénomènes qui tendent à s'opposer au mouvement ou, à la tendance au mouvement relatif de 2 pièces en contact.
- S'il existe un mouvement relatif entre les 2 pièces en contact, on dit qu'il y a frottement.
- S'il existe une tendance au mouvement relatif entre les 2 pièces en contact (mais sans mouvement...), on dit qu'il y a adhérence.
- L'équilibre strict se situe juste avant le mouvement (il n'y a pas encore de mouvement).

Le *frottement* est un phénomène dissipateur d'énergie observée au niveau du mouvement relatif entre deux éléments.

9.1 Mise en évidence : comportement d'une pièce sous une poussée latérale $\vec{F}$.

Extrait du cours S. Génouel

On considère ici un solide 2 en contact surfacique avec un solide 1, sur lequel on vient appuyer avec un effort $\vec{F}$. On distingue alors 4 cas, et pour chaque :

$\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$ schématise la résultante des actions de pression exercées par 1 sur 2 et $\vec{P}_2$ schématise le poids de 2.

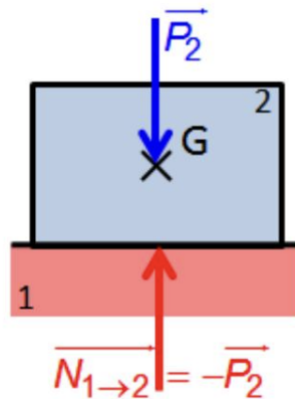
$\vec{T}_{a,1 \rightarrow 2}$ schématise la résultante des actions tangentielle d'adhérence exercées par 1 sur 2.

$\vec{T}_{f,1 \rightarrow 2}$ schématise la résultante des actions tangentielles de frottement exercées par 1 sur 2.

- Cas 1 - repos : $\vec{F} = \vec{0}$ On a :

$$\vec{V}_{I,2/1} = \vec{0}$$

Pas le cas le plus intéressant : le système est au repos.



On en déduit très vite :

$$\vec{N}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{P}_2$$

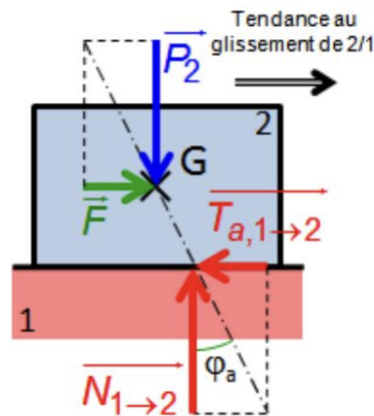
- Cas 2 - adhérence : $\vec{F} < F_{lim}$

On a :

$$\vec{V}_{I,2/1} = \vec{0}$$

Lorsque qu'une action $\vec{F}$ tend à faire glisser 2/1, il existe une action tangentielle d'adhérence de 1 sur 2, $\vec{T}_{a,1 \rightarrow 2}$ (égale et opposée à $\vec{F}$) qui s'oppose à cette tendance au glissement de 2/1.

Cette action tangentielle d'adhérence va faire incliner l'action globale de 1 sur 2 d'un angle φ_a par rapport à la normale. C'est le cas 2.



$$\overrightarrow{T_{a,1 \rightarrow 2}} = -\vec{F}$$

Au niveau de l'angle d'adhérence, $\phi_a < \phi_{alim}$ on a alors :

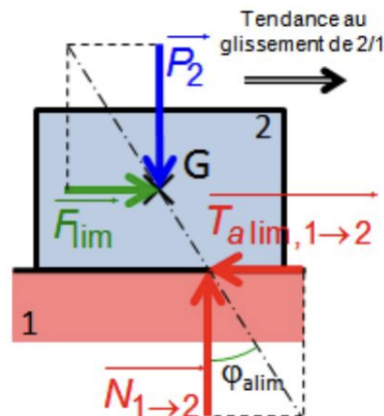
$$\tan \phi_a = \frac{|\overrightarrow{T_{a,1 \rightarrow 2}}|}{|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}|} = \frac{T_{a,1 \rightarrow 2}}{N_{1 \rightarrow 2}}$$

- Cas 3 - limite de l'adhérence : $\vec{F} = \vec{F}_{lim}$

On a toujours :

$$\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \vec{0}$$

Si F devient trop grand, 2 se mettra à glisser. Donc, cette action tangentielle d'adhérence a une limite $\overrightarrow{T_{alim,1 \rightarrow 2}}$ (égale et opposée à $\overrightarrow{F_{lim}}$) à partir de laquelle l'opposition au glissement ne sera plus suffisante pour maintenir 2 immobile. C'est le cas 3.



$$\overrightarrow{T_{alim,1 \rightarrow 2}} = -\overrightarrow{F_{lim}}$$

Au niveau de l'angle d'adhérence, ϕ_{alim} , on a alors :

$$\mu_{alim} = \tan \phi_{alim} = \frac{T_{a,lim,1 \rightarrow 2}}{N_{1 \rightarrow 2}} = \text{cste}$$

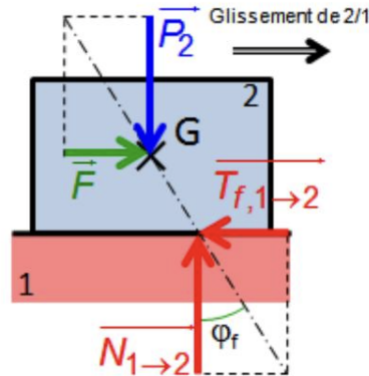
avec μ_{alim} coefficient d'adhérence .

- Cas 4 - frottement : $\vec{F} > \vec{F}_{lim}$

Cette fois ci :

$$\overrightarrow{V_{P \in 2/1}} \neq \vec{0}$$

2 se met à glisser sur 1 dans le même sens que F . Il existe une action tangentielle de frottement $\overrightarrow{T_{f,1 \rightarrow 2}}$ (quasi constante) $< \vec{F}$ qui s'oppose au glissement de 2/1 (sans l'empêcher).



$$\overrightarrow{T_{f,1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{Cte} < \overrightarrow{T_{alim,1 \rightarrow 2}}$$

Le glissement se fera à vitesse :

- ◇ uniforme si $|\vec{F}| = |\overrightarrow{T_{f,1 \rightarrow 2}}|$
- ◇ accélérée si $|\vec{F}| > |\overrightarrow{T_{f,1 \rightarrow 2}}|$.

Au niveau de l'angle, on parle ici d'angle de frottement $\phi_f < \phi_{alim}$

$$\mu_f = \tan \phi_f = \frac{T_{f,1 \rightarrow 2}}{N_{1 \rightarrow 2}} = cste$$

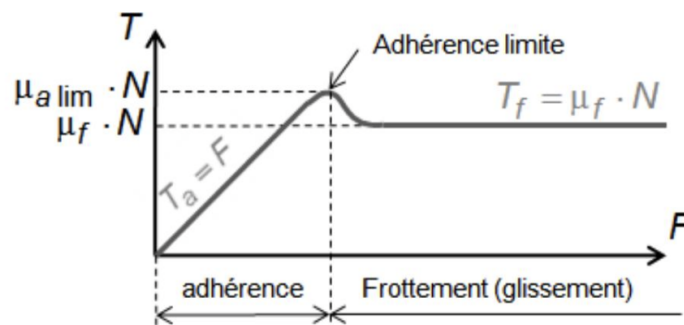
avec μ_f coefficient de frottement.

9.2 Récapitulatif sur l'évolution des actions tangentielles d'adhérence T_a et de frottement T_f .

L'action tangentielle de frottement T_f est à l'origine des pertes d'énergie par frottement.

Si l'objet est arrêté, il faudra, pour le remettre en mouvement, fournir une action $F > \mu_{alim} \cdot N$.

Les différentes phases sont résumées sur le graphique pour illustrer ce propos :



**Remarque**

Dans le programme de PSI/MP, et plus généralement en CPGE, nous ne ferons pas la distinction entre μ_a et μ_f que vous avez déjà rencontrés sous la forme f .

9.3 Coefficients d'adhérence et de frottement : μ .

μ_a limite et μ_f ne dépendent :

- ni de l'intensité des actions exercées,
- ni de l'étendue des surfaces en contact.

Ils dépendent essentiellement :

- de la nature du couple de matériaux en contact,
- de la rugosité des surfaces en contact,
- de la lubrification (sec ou lubrifié),
- de la température au niveau des surfaces en contact qui peut favoriser des microsoudures ou la rupture du film d'huile si le contact est lubrifié,
- de la vitesse de glissement...

Toutefois, en première approximation, on considère que le paramètre prépondérant concerne uniquement la nature du couple de matériaux en contact.

Matériaux en contact	Adhérence		Frottement	
	$\mu_a \text{ limite} = \tan \varphi_a \text{ limite}$		$\mu_f = \tan \varphi_f$	
	A sec	Lubrifié	A sec	Lubrifié
Acier sur acier	0,18	0,12	0,15	0,09
Acier sur fonte	0,19	0,10	0,16	0,08 à 0,04
Acier sur bronze	0,11	0,10	0,10	0,09
Téflon sur acier	0,04		0,04	
Fonte sur bronze		0,10	0,20	0,08 à 0,04
Nylon sur acier			0,35	0,12
Bois sur bois	0,65	0,20	0,40 à 0,20	0,16 à 0,04
Métaux sur bois	0,60 à 0,50	0,10	0,50 à 0,20	0,08 à 0,02
Métal sur glace			0,02	
Pneu voiture sur route	0,80		0,60	0,30 à 0,10 sur sol mouillé

**Propriété**

Le coefficient d'adhérence est toujours supérieur au coefficient de frottement ($\mu_a \text{ lim} > \mu_f$). Mais étant donné le grand nombre de paramètres qui interviennent dans leur détermination, on considère souvent, par mesure de simplification, que ces deux coefficients sont égaux et nommés μ ou f .

Synthèse

CHAPITRE 6 - RAPPELS DE STATIQUE

Lois de l'équilibre

- Un mouvement nul se traduit par un champ de vecteurs vitesses nuls ;
- Équilibre d'un solide indéformable (avec n actions mécaniques extérieures) :

$$\forall t, \{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \{0\} \Leftrightarrow \forall t, \sum_{k=0}^n \{\mathcal{T}_{k \rightarrow S}\} = \{0\}$$

Modélisation des actions mécaniques

- Une action mécanique permet d'expliquer la déformation ou le mouvement d'un solide, on la modélise par le torseur des actions mécaniques :

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow k}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \\ \overrightarrow{M_{A, i \rightarrow j}} \end{array} \right\}_A$$

- La formule de changement de point du moment du torseur des actions mécaniques est donnée par la relation de Varignon :

$$\forall i/j, \forall A \text{ et } \forall B, \quad \overrightarrow{M_{B, i \rightarrow j}} = \overrightarrow{M_{A, i \rightarrow j}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}}$$

- Les actions mécaniques extérieures et intérieures sont modélisées par les torseurs suivants :

$$\{\mathcal{T}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}\} = \sum_{k=0}^n \{\mathcal{T}_{k \rightarrow \Sigma}\}$$

$$\forall i \in \Sigma, \forall j \in \Sigma, \quad \{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\}$$

Modélisation de la transmission des actions mécaniques

- La puissance dissipée par effet Joule au niveau des liaisons supposées parfaite est nulle ;
- Pour chaque degré de liberté, on pose une inconnue scalaire d'actions mécaniques transmissibles (et *vice-versa*).

Lois du frottement Soit $N_{k \rightarrow i}$ l'effort normal d'un solide k sur un solide i , les frottements induisent une force tangentielle $T_{k \rightarrow i}$ dont la relation est :

- lorsqu'il y a glissement :

$$\left| \frac{T_{k \rightarrow i}}{N_{k \rightarrow i}} \right| = f$$

- lorsqu'il y a adhérence :

$$\left| \frac{T_{k \rightarrow i}}{N_{k \rightarrow i}} \right| \leq f$$