Feuille d'exercices n°51

Exercice 1 (***)

Soit $(a_n)_n$ la suite réelle définie par $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ vérifie $\mathrm{R} \geqslant 1$.
2. Montrer $$\forall z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{\mathrm{e}^z + 1}$$
3. En déduire l'expression du développement en série entière de la fonction tan sur $\left] -\frac{\mathrm{R}}{2} ; \frac{\mathrm{R}}{2} \right[$.

Corrigé : 1. On a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$$

Montrons par récurrence forte que $|a_n| \leqslant 1$ pour tout n entier. L'initialisation est immédiate. Si la propriété est vraie jusqu'à $n-1$ avec n entier non nul, on a

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{k!} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{\mathrm{e} - 1}{2} \leqslant 1$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{R} \geqslant 1}$$

2. Soit $z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. On a

$$\begin{aligned}
(1 + \mathrm{e}^z) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} \right) z^n = 2a_0 = 2
\end{aligned}$$

Le produit est non nul ce qui prouve que $1 + \mathrm{e}^z \neq 0$ et par suite

$$\boxed{\forall z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{\mathrm{e}^z + 1}}$$

Remarque : Comme $1 + \mathrm{e}^z \neq 0$, on en déduit $\mathrm{R} \leqslant \pi$.

3. Pour $x \in \left] -\frac{\mathrm{R}}{2} ; \frac{\mathrm{R}}{2} \right[\subset \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, on a

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 1}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1)} = -\mathrm{i} \left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1} \right)$$

Comme on a $|2\mathrm{i}x| < \mathrm{R}$, il vient

$$\tan(x) = \mathrm{i} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (2\mathrm{i})^n x^n$$

Par imparité de tan, on a $a_{2n} = 0$ et on conclut

$$\boxed{\forall x \in \left] -\frac{\mathrm{R}}{2} ; \frac{\mathrm{R}}{2} \right[\qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n+1} a_{2n+1} x^{2n+1}}$$

Exercice 2 (***)

Une *involution* sur un ensemble E est une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. Pour n entier, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1\,;\, n]\!]$. On fixe $\mathrm{I}_0 = 1$ par convention.

1. Préciser I_1, I_2 puis montrer
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$$
2. Montrer que la série $\sum \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note S sa somme sur $]-1\,;1\,[$.
3. Établir $\qquad \forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}'(x) = (1+x)\mathrm{S}(x)$
4. En déduire une expression de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in\,]-1\,;1\,[$ puis une expression de I_n pour n entier.

Corrigé : 1. On a sans difficulté $\mathrm{I}_1 = 1$ et $\mathrm{I}_2 = 2$. Soit $n \geqslant 2$. Notons J_n l'ensemble des involutions de $[\![1\,;\, n]\!]$. On a
$$\mathrm{J}_n = \{\sigma \in \mathrm{J}_n \mid \sigma(n) = n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \{\sigma \in \mathrm{J}_n \mid \sigma(n) = i\}$$
Il s'agit d'unions disjointes. Une involution de $[\![1\,;\, n]\!]$ qui fixe n est en bijection avec une involution de $[\![1\,;\, n-1]\!]$. Ainsi
$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Card}\, \{\sigma \in \mathrm{J}_n \mid \sigma(n) = i\}$$
Enfin, une involution de $[\![1\,;\, n]\!]$ qui envoie n sur $i \neq n$ envoie également i sur n, les autres images étant non contraintes. Ainsi, une telle involution est en bijection avec une involution de $[\![1\,;\, n-2]\!]$. Finalement
$$\boxed{\mathrm{I}_1 = 1,\ \mathrm{I}_2 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}}$$

2. On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{J}_n \subset \mathrm{S}_n$

d'où $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n \leqslant n!$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La série entière } \sum \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n \text{ a un rayon de convergence } \mathrm{R} \geqslant 1.}$

3. On a $\qquad \forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$

Par dérivation de série entière, on trouve
$$\forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{(n-1)!} x^{n-1}$$
Par linéarité du symbole somme, on a pour $x \in\,]-1\,;1\,[$
$$(1+x)\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n + n\mathrm{I}_{n-1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{n!} x^n$$
Après changement d'indice, on conclut
$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}'(x) = (1+x)\mathrm{S}(x)}$$

4. La fonction S est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' = (1+x)f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Après résolution et par unicité du théorème de Cauchy linéaire, on obtient

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

Avec le développement en série entière de l'exponentielle et le théorème du produit de Cauchy, on obtient après calcul

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{n}{2k}}$$

Exercice 3 (****)

Pour $y \in \left]-1\,;1\right[$ et x réel, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)$$

Peut-on prolonger l'égalité pour $y \in [-1\,;1]$?

Corrigé : Soit x réel et n entier non nul. On a

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \left|\frac{\sin(nx)}{n} y^n\right| \leqslant |y|^n$$

Ainsi, la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n} y^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On pose

$$\forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n$$

Par dérivation d'une série entière, on a

$$\forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{\sin(nx)y^n}{n}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx)\, y^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)x)\, y^n$$

La série $\sum \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} y^n$ converge absolument pour $|y| < 1$. Par suite

$$\forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(y) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} y^n\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$$

On multiplie par l'expression conjuguée et on isole la partie imaginaire pour obtenir

$$\forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(y) = \frac{\sin(x)}{(1-y\cos(x))^2 + (y\sin(x))^2}$$

Posons $\qquad \forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{T}(y) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)$

On a $\mathrm{T} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ d'après les théorèmes généraux et par dérivation

$$\begin{aligned} \forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{T}'(y) &= \sin(x)\frac{1-y\cos(x)+\cos(x)y}{(1-y\cos(x))^2}\,\frac{1}{1+\left(\dfrac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)^2} \\ &= \frac{\sin(x)}{(1-y\cos(x))^2+(y\sin(x))^2} \end{aligned}$$

Ainsi $\qquad \forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad (\mathrm{S}-\mathrm{T})'(y)=0 \quad \text{et} \quad (\mathrm{S}-\mathrm{T})(0)=0$

La fonction $\mathrm{S}-\mathrm{T}$ est donc nulle sur l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$ et on conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)y^n}{n} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)}$$

Pour $x \in \pi\mathbb{Z}$ et $y \in \{-1,1\}$, le dénominateur du membre de droite de l'égalité précédente s'annule. Supposons $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$. On pose

$$\forall (n,y) \in \mathbb{N}\times[-1\,;1] \qquad u_n(y) = \frac{\sin(nx)}{n}y^n$$

On va montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[-1\,;1]$. On pose

$$\forall (n,y) \in \mathbb{N}^*\times[-1\,;1] \qquad \mathrm{A}_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)y^k$$

Soit n entier et $y \in [-1\,;1]$. On a

$$\mathrm{A}_n(y) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-(y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{n+1}}{1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$$

D'où $\qquad |\mathrm{A}_n(y)| \leqslant \left|\frac{1-(y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{n+1}}{1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right| \leqslant \frac{2}{|1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}$

et $\qquad \left|1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^2 = (1-y\cos(x))^2 + (y\sin(x))^2 \geqslant \sin^2 x$

Ainsi $\qquad \forall (n,y) \in \mathbb{N}\times[-1\,;1] \qquad |\mathrm{A}_n(y)| \leqslant \frac{2}{|\sin(x)|}$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Par transformation d'Abel, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(y) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\left[\mathrm{A}_k(y)-\mathrm{A}_{k-1}(y)\right] \\
&= \frac{\mathrm{A}_{n+p}(y)}{n+p} - \frac{\mathrm{A}_n(y)}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \mathrm{A}_k(y)\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right] \\
\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(y) &= \frac{\mathrm{A}_{n+p}(y)}{n+p} - \frac{\mathrm{A}_n(y)}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{\mathrm{A}_k(y)}{k(k+1)}
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(y)\right| \leqslant \frac{2}{|\sin(x)|}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+p}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

Faisant tendre $p \to +\infty$, notant $\mathrm{R}_n(y)$ le reste d'ordre n de la série $\sum u_n(y)$, il vient

$$|\mathrm{R}_n(y)| \leqslant \frac{2}{|\sin(x)|}\left(\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

On en déduit $\qquad \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[-1;1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ainsi, la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[-1\,;1]$. Par conséquent, la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[-1\,;1]$ et la fonction T se prolonge par continuité en 1 et -1. On conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \times [\,-1\,;1\,] \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)}$$

Remarque : On peut aussi prolonger l'égalité pour $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \times \,]-1\,;1\,]$ ou pour $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \pi(2\mathbb{Z}+1) \times [\,-1\,;1\,[$. Par exemple pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, n entier et $y \in \,]-1\,;1\,]$, on a

$$|\mathrm{A}_n(y)| \leqslant \frac{2}{|1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|} \leqslant \frac{2}{\mathrm{C}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \operatorname*{Inf}_{y \in]-1\,;1]} \left|1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| > 0$$

et on poursuit comme précédemment. Ainsi, pour $y=1$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\right) = \operatorname{Arctan}\tan\left(\frac{\pi-x}{2}\right)$$

En particulier $\qquad \forall x \in \,]\,0\,;2\pi\,[\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}$

Ce résultat est un classique de la théorie des séries de Fourier (hors programme...)

Exercice 4 (****)

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ avec $a_0 \neq 0$. On note S sa somme.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_n$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$$
2. Montrer que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif.
3. En déduire que $\dfrac{1}{\mathrm{S}}$ est développable en série entière.

Corrigé : 1. On procède par récurrence forte. On a

$$a_0 b_0 = 1 \iff b_0 = \frac{1}{a_0}$$

ce qui prouve existence et unicité de b_0. Supposons l'existence et unicité de $b_0, \ldots, b_{n-1}$ pour n entier non nul fixé. On a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \iff b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

ce qui prouve existence et unicité de b_n. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe une unique suite } (b_n)_n \text{ vérifiant } \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n} \text{ pour } n \text{ entier.}}$$

2. Soit $r \in \,]\,0\,;\mathrm{R}\,[$. La suite $(a_n r^n)_n$ est bornée d'où l'existence de $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n|\, r^n \leqslant \mathrm{M} \leqslant (\mathrm{M}+1)$$

Ainsi $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |a_n|\, r^n \leqslant (\mathrm{M}+1)^n$

et par suite $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |a_n| \leqslant \mathrm{C}^n \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \dfrac{\mathrm{M}+1}{r}$

On choisit $\qquad \mathrm{D} = \left(1 + \dfrac{1}{|a_0|}\right)\mathrm{C}$

Ainsi $\qquad \sum \left(\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\right)^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\right)^n = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}-\mathrm{C}} = |a_0|$

Montrons par récurrence $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |b_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{D}^n}{|a_0|}$

L'initialisation est immédiate. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ avec n entier non nul. On a

$$|b_n| = \frac{1}{|a_0|}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right| \leqslant \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \leqslant \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}^k \frac{\mathrm{D}^{n-k}}{|a_0|} \leqslant \frac{\mathrm{D}^n}{|a_0|^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\right)^k$$

d'où $$|b_n| \leqslant \frac{\mathrm{D}^n}{|a_0|}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La série entière } \sum b_n z^n \text{ possède un rayon de convergence } \mathrm{R}' \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{D}}.}$

3. D'après le théorème du produit du Cauchy, on a

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, \min(\mathrm{R}, \mathrm{R}')) \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = 1$$

Autrement dit $\qquad \forall z \in \mathrm{D}(0, \min(\mathrm{R}, \mathrm{R}')) \qquad \dfrac{1}{\mathrm{S}(z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

On conclut $\qquad \boxed{\text{La fonction } \dfrac{1}{\mathrm{S}} \text{ est développable en série entière.}}$

Exercice 5 (****)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$. On note f sa fonction somme sur $\mathbb{C}$.

1. Pour n entier et $r > 0$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $r > 0$. Montrer que si f est réelle sur le cercle de centre O de rayon r, alors f est constante sur $\mathbb{C}$.
3. Montrer que si f est nulle sur un arc de longueur non nulle du cercle de centre O de rayon r, alors f est nulle sur $\mathbb{C}$.

Corrigé : 1. Soit $r > 0$. La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathrm{D}(0, r)$. Il s'ensuit que la série de fonctions $\sum u_k$ avec $u_k : t \mapsto a_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)t}$ où n et k sont entiers converge normalement donc uniformément sur $[\,0\,; 2\pi\,]$. En intégrant terme à terme, il vient

$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)t}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall (n, r) \in \mathbb{N} \times \,]\,0\,; +\infty\,[\qquad \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_n r^n}$

2. Par un calcul identique à précédemment, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_0 \delta_{n,0}$$

Par conjugaison, il vient $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = 2\pi\overline{a_0}\delta_{n,0}$

Or, on sait que la fonction f est à valeurs réelles sur le cercle de centre O de rayon r d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \overline{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 2\pi a_n r^n = 2\pi\overline{a_0}\delta_{n,0}$

On en déduit $\qquad a_0 = \overline{a_0} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = 0$

On conclut $\qquad \boxed{\text{La fonction } f \text{ est constante sur } \mathbb{C}.}$

3. Soit α la longueur de l'arc de cercle sur lequel f s'annule. Soit n entier tel que $n\alpha > 2\pi$ et on pose

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad g(z) = \prod_{k=0}^{n} f(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha})$$

La fonction g est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ comme produit de telles fonctions. Par ailleurs, on effectue des rotations d'angle 0, α, … $n\alpha > 2\pi$ qui garantissent qu'on effectue au moins un tour complet sur la variable z complexe dans $g(z)$. On en déduit que $g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = 0$ pour tout t réel. Puis, notant $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $(b_n)_n$ suite complexe, il vient avec le résultat de la première question

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2\pi b_n r^n = \int_0^{2\pi} g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = 0$$

Il s'ensuit que g est nulle. On a $g\left(\dfrac{1}{p}\right) = 0$ pour tout p entier non nul d'où l'existence de $k \in [\![0\,;n]\!]$ tel que $f\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{p}\right) = 0$ pour une infinité de valeurs de p dans $\mathbb{N}^*$. Or, si h est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ avec $h(x_p) = 0$ et les $x_p \neq 0$ avec $x_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, alors la fonction h est nulle. En effet, sinon, en considérant le premier terme non nul de son développement, on a

$$h(z) = \sum_{n=\ell}^{+\infty} a_n z^n = z^\ell \varphi(z) \quad \text{avec} \quad \varphi(z) = \sum_{n=\ell}^{+\infty} a_n z^{n-\ell}$$

d'où $\qquad a_\ell = \varphi(0) = \lim\limits_{p\to+\infty} \varphi(x_p) = 0$

ce qui est absurde. On conclut $\qquad \boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle.}}$

Remarque : Le résultat démontré sur la fonction h s'intitule le *principe des zéros isolés.*