ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°49

Exercice 1 (*)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \operatorname{th}(n) z^n$
2. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$
3. $\sum_{n \geqslant 1} \ln(n) z^n$
4. $\sum \mathrm{e}^{-n^2} z^n$
5. $\sum \ln(\operatorname{ch}(n)) z^n$
6. $\sum \ln(\operatorname{th}(n)) z^n$

Exercice 2 (**)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) z^n$
2. $\sum \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) z^n$
3. $\sum \ln(n!) z^n$
4. $\sum z^{n^2}$
5. $\sum 2^n z^{3n}$
6. $\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}} z^{2n}$

Exercice 3 (*)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum n x^n$
2. $\sum (n+1) x^{2n}$
3. $\sum n^2 x^n$

Exercice 4 (**)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum \operatorname{sh}(n) x^n$
2. $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$
3. $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$
4. $\sum \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$

Exercice 5 (*)

Justifier que les fonctions suivantes se prolongent se prolongent en fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

1. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
2. $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$
3. $x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2}$

Exercice 6 (**)

Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser les rayons de convergence :

1. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$
2. $x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$
3. $x \mapsto \sin(x)\mathrm{e}^x$

Exercice 7 (**)

On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Déterminer son rayon de convergence R. On notera S sa somme sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$ si $\mathrm{R} > 0$.
2. Étudier $\lim_{x \to \mathrm{R}} \mathrm{S}(x)$.

Exercice 8 (**)

Soit f développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $(x_n)_n \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f(x_n) = 0$ pour tout n entier. Montrer que f est nulle.

Exercice 9 (**)

Montrer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \operatorname{Arctan} t \, \mathrm{d}t$$
En déduire la valeur de cette somme.

Exercice 10 (**)

Soit n entier. Un *dérangement* est une permutation de $[\![1\,;\, n]\!]$ sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1\,;\, n]\!]$ avec $\mathrm{D}_0 = 1$ pour convention.

1. Justifier $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_{n-k}$$
2. Montrer que le rayon de convergence n'est pas nul puis déterminer la somme de la série entière $\sum \dfrac{\mathrm{D}_n}{n!} x^n$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{D}_n}{n!}$.

Exercice 11 (**)

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et $r \in \,]\,0\,;\mathrm{R}\,[$. On note $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.

1. Montrer $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad 2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} \, \mathrm{d}\theta$$
2. On suppose $\mathrm{R} = +\infty$ et f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 (**)

On pose
$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad f(x) = \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 puis montrer que f est développable en série entière et préciser son développement.