ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°50

Exercice 1 (**)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$.
2. Montrer que la suite $\left(\ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
3. En déduire un équivalent de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$ pour $x \to 1^-$.

Exercice 2 (**)

Montrer les égalités :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th}(t))\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

Exercice 3 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite non nulle T-périodique avec T entier non nul.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Déterminer sa somme S sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 4 (***)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum a_n^2 z^n$
2. $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$
3. $\sum \frac{n!\, a_n}{n^n} z^n$

Exercice 5 (***)

Déterminer le rayon puis un équivalent en 1 de la somme de la série entière $\sum x^{n^2}$.

Exercice 6 (***)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer
$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^z$$

Exercice 7 (***)

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On suppose que $\sum a_n \mathrm{R}^n$ converge. À l'aide d'une transformation d'Abel, montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[\,0\,;\mathrm{R}\,]$.
2. Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$ deux séries réelles ou complexes convergentes de produit de Cauchy $\sum c_n$. Montrer que si la série $\sum c_n$ converge, alors on a la relation

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

Exercice 8 (****)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite sommable. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

1. Montre que la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{C}$.
2. Établir l'égalité $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
3. Désormais, on suppose seulement que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que les résultats précédents demeurent. On pourra poser

$$\mathrm{A}_{-1} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_{n-1} \frac{z^n}{n!}$$

Exercice 9 (****)

Soit $\alpha > 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$. On note S sa somme.
2. Établir

$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \frac{x}{|\ln(x)|^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{1}{x\,|\ln(x)|^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1)$$

3. En déduire un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 1^-$.