Feuille d'exercices n°51

Exercice 1 (***)

Soit $(a_n)_n$ la suite réelle définie par $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ vérifie $\mathrm{R} \geqslant 1$.
2. Montrer $$\forall z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{\mathrm{e}^{z} + 1}$$
3. En déduire l'expression du développement en série entière de la fonction tan sur $\left] -\frac{\mathrm{R}}{2} \,;\, \frac{\mathrm{R}}{2} \right[$.

Indications : 1. Majorer $(|a_n|)_n$ par récurrence forte. On pourra utiliser le fait que $\mathrm{e} - 1 \leqslant 2$.
2. Distribuer $(1 + \mathrm{e}^{z}) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ puis faire apparaître un produit de Cauchy.
3. Pour $x \in \left] -\frac{\mathrm{R}}{2} \,;\, \frac{\mathrm{R}}{2} \right[$, écrire $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ puis utiliser les formules d'Euler et le résultat de la question précédente.

Exercice 2 (***)

Une *involution* sur un ensemble E est une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. Pour n entier, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1 \,;\, n]\!]$. On fixe $\mathrm{I}_0 = 1$ par convention.

1. Préciser I_1, I_2 puis montrer $$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$$
2. Montrer que la série $\sum \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note S sa somme sur $]-1\,;1[$.
3. Établir $$\forall x \in]-1\,;1[\qquad \mathrm{S}'(x) = (1+x)\mathrm{S}(x)$$
4. En déduire une expression de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in]-1\,;1[$ puis une expression de I_n pour n entier.

Indications : 1. Considérer les involutions de $[\![1 \,;\, n]\!]$ qui fixent n et les autres.
3. Pour $x \in]-1\,;1[$, calculer $(1+x)\mathrm{S}(x)$ en exploitant la relation de la première question.
4. Déterminer un système de Cauchy dont S est solution puis expliciter S. À l'aide d'un produit de Cauchy, déterminer le développement en série entière de la fonction S.

Exercice 3 (****)

Pour $y \in \,]-1\,;1\,[$ et x réel, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)$$

Peut-on prolonger l'égalité pour $y \in [\,-1\,;1\,]$?

Indications : Justifier la dérivabilité des membres de l'égalité en tant que fonctions de y puis comparer les dérivées. Pour le prolongement sur $[\,-1\,;1\,]$, identifier les valeurs sensées de x pour un tel prolongement puis poser

$$\forall (n,y) \in \mathbb{N} \times [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{A}_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) y^k$$

et réaliser une transformation d'Abel sur $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(y)$ avec $u_k(y) = \dfrac{\sin(kx)}{k} y^k$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $y \in [\,-1\,;1\,]$.

Exercice 4 (****)

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ avec $a_0 \neq 0$. On note S sa somme.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_n$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$$
2. Montrer que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif.
3. En déduire que $\dfrac{1}{\mathrm{S}}$ est développable en série entière.

Indications : 1. Procéder par récurrence forte.
2. Justifier qu'il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que $|a_n| \leqslant \mathrm{C}^n$ pour n entier non nul puis montrer $|b_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{D}^n}{|a_0|}$ pour tout n entier avec $\mathrm{D} = \left(1 + \dfrac{1}{|a_0|}\right)\mathrm{C}$.
3. Utiliser le théorème du produit de Cauchy.

Exercice 5 (****)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$. On note f sa fonction somme sur $\mathbb{C}$.

1. Pour n entier et $r > 0$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $r > 0$. Montrer que si f est réelle sur le cercle de centre O de rayon r, alors f est constante sur $\mathbb{C}$.
3. Montrer que si f est nulle sur un arc de longueur non nulle du cercle de centre O de rayon r, alors f est nulle sur $\mathbb{C}$.

Indications : 2. Étendre le résultat de la première question en déterminant $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt})\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$ pour n entier puis considérer le conjugué de cette intégrale.
3. Considérer $g(z) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} f\left(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}\right)$ avec n tel que $n\alpha > 2\pi$ où α désigne la longueur d'arc de cercle sur lequel la fonction f s'annule.