

Feuille d'exercices n°38

Exercice 1 (**)

Étudier selon $\alpha > 1$ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right)$ et en cas de finitude, exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ de Riemann.

Corrigé : D'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[0; k-1]}(n)}{k^\alpha} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[0; k-1]}(n)}{k^\alpha} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

et
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}} < +\infty \iff \alpha - 1 > 1$$

On conclut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) < +\infty \iff \alpha > 2 \quad \text{et} \quad \alpha > 2 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \zeta(\alpha - 1)$$

Variante : Posons $I = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid 0 \leq n < k\}$

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{n\} \times \{k \in \mathbb{N} \mid k > n + 1\}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad J_k = [0; k - 1] \times \{k\}$

Les famille $(I_n)_n$ et $(J_k)_{k \geq 1}$ sont des recouvrements disjoints de I et d'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{(n,k) \in I_p} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{(n,k) \in I} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\sum_{(n,k) \in J_\ell} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^{\alpha-1}}$$

On conclut comme précédemment.

Exercice 2 (***)

Soit α réel. Étudier la somme $\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}$.

Corrigé : Notons

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \quad u_{m,n} = \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha} \quad \text{et} \quad v_{m,n} = \frac{1}{(m + n)^{2\alpha}}$$

Ces familles sont à termes positifs. On a l'encadrement

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \frac{1}{2}(m + n)^2 \leq m^2 + n^2 \leq (m + n)^2$$

d'où pour $\alpha \geq 0$ $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \frac{1}{(m + n)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{(m + n)^{2\alpha}}$

et l'encadrement est inversé pour $\alpha \leq 0$. Il s'ensuit

$$(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \text{ sommable} \iff (v_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \text{ sommable}$$

Posons $\forall p \geq 2 \quad I_p = \{(m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m + n = p\}$

La famille $(I_p)_{p \geq 2}$ est un recouvrement disjoint de \mathbb{N}^{*2} et on a

$$\forall p \geq 2 \quad I_p = \{(m, p - m), m \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket\}$$

Par suite

$$\sum_{(m,n) \in I_p} v_{m,n} = \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{p^{2\alpha}} = \frac{p-1}{p^{2\alpha}} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^{2\alpha-1}}$$

Ainsi, d'après le critère de Riemann et le critère des équivalents, licite pour une famille à termes positifs, puis le théorème de sommation par paquets, il vient

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} v_{m,n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{2\alpha}} < +\infty \iff 2\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 1$$

On conclut

La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 3 (***)

Soit α réel. Étudier la somme $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{m^\alpha + n^\alpha}$.

Corrigé : Pour $\alpha \geq 1$, il vient par convexité de $u \mapsto u^\alpha$ sur $[0; +\infty[$

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \quad m^\alpha + n^\alpha = 2 \left(\frac{m^\alpha}{2} + \frac{n^\alpha}{2} \right) \geq 2 \left(\frac{m+n}{2} \right)^\alpha = 2^{1-\alpha} (m+n)^\alpha$$

puis

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \left(\frac{m}{m+n} \right)^\alpha + \left(\frac{n}{m+n} \right)^\alpha \leq \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} \iff (m+n)^\alpha \geq m^\alpha + n^\alpha$$

D'où $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \frac{1}{(m+n)^\alpha} \leq u_{m,n} = \frac{1}{m^\alpha + n^\alpha} \leq \frac{2^{\alpha-1}}{(m+n)^\alpha}$

Si $\alpha < 1$, il suffit d'observer $m^\alpha + n^\alpha \leq m+n$ pour m et n entiers non nuls. Dans tous les cas, avec le recouvrement disjoint $(I_p)_{p \geq 2}$ où $I_p = \{(m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m + n = p\}$, on conclut

La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 4 (***)

Montrer l'égalité $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n}$

Corrigé : Posons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est un carré non nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad b_n = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{1 \leq k^2 \leq n} a_{k^2} b_{n-k^2} = \sum_{1 \leq k^2 \leq n} \frac{1}{2^{k^2}} \frac{1}{2^{n-k^2}} = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n} \quad \text{et} \quad c_0 = 0$$

La série $\sum b_n$ converge absolument comme série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et la comparaison $0 \leq a_n \leq b_n$ fournit également la convergence absolue de la série $\sum a_n$. Ainsi, d'après le théorème du produit de Cauchy, la série $\sum c_n$ converge absolument et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \right)$$

Finalement

$$\boxed{2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n}}$$

Variantes : 1. Pour k entier, on note $I_k = \llbracket k^2; (k+1)^2 - 1 \rrbracket$. La famille $(I_k)_{k \geq 1}$ est un recouvrement disjoint de \mathbb{N}^* . On note $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n}$ pour n entier. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n \in I_k} u_n = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{k}{2^n} = 2k \frac{1}{2^{k^2}} \left(1 - \frac{1}{2^{(k+1)^2 - k^2}} \right) = 2k \left(\frac{1}{2^{k^2}} - \frac{1}{2^{(k+1)^2}} \right)$$

puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2k \left(\frac{1}{2^{k^2}} - \frac{1}{2^{(k+1)^2}} \right) = 2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k^2}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^{k^2}} \right) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k^2}}$$

Ainsi, par théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \in I_k} u_n \right) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k^2}}$$

2. D'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\llbracket m^2; +\infty \rrbracket}(n)}{2^n} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\llbracket m^2; +\infty \rrbracket}(n)}{2^n} \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=m^2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{2^{m^2}} \end{aligned}$$

Exercice 5 (***)

On précise que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}$.

Corrigé : Notons $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad u_{p,q} = \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$

La famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs et on a

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad u_{p,q} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$$

D'après le théorème de Fubini et par télescopage, il vient

$$\boxed{\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+1+q^2} \right] \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Pour n entier non nul, on pose

$$I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid p + q^2 = n\}$$

La famille $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et d'après le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Card } I_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Enfin, on a $\text{Card } I_n = \sum_{1 \leq q^2 \leq n} 1 = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ d'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Variante : On peut aussi écrire, d'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\lfloor q^2; +\infty \rfloor}(n)}{n(n+1)} \right) \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\lfloor q^2; +\infty \rfloor}(n)}{n(n+1)} \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=q^2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \end{aligned}$$

Exercice 6 (***)

On précise que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}, m \wedge n = 1} \frac{1}{n^2 m^2}$$

Corrigé : D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{n^2 m^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 m^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \right) = \frac{\pi^4}{36}$$

Pour d entier non nul, on note

$$I_d = \{(m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m \wedge n = d\}$$

La famille $(I_d)_{d \in \mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de \mathbb{N}^{*2} . Ainsi, d'après le théorème de sommation par paquets, il vient

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{n^2 m^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \left(\sum_{(m,n) \in I_d} \frac{1}{m^2 n^2} \right)$$

Par ailleurs, on a pour d entier non nul

$$(m, n) \in I_d \iff \exists!(m', n') \in I_1 \mid (m, n) = (dm', dn')$$

d'où

$$I_d = \{(dm', dn'), (m', n') \in I_1\}$$

Par suite

$$\sum_{(m,n) \in I_d} \frac{1}{m^2 n^2} = \sum_{(m',n') \in I_1} \frac{1}{d^4} \times \frac{1}{m'^2 n'^2}$$

Ainsi

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \left(\sum_{(m,n) \in I_d} \frac{1}{m^2 n^2} \right) = \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^4} \right) \left(\sum_{(m',n') \in I_1} \frac{1}{m'^2 n'^2} \right)$$

Finalement

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}, m \wedge n = 1} \frac{1}{n^2 m^2} = \frac{\pi^4}{36} \times \frac{90}{\pi^4} = \frac{5}{2}$$

Exercice 7 (****)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n) + n}$.

Corrigé : Si $\sigma = \text{id}$, la série diverge. Mais ce n'est pas toujours le cas. On note

$$A = \{n^2, n \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad B = \mathbb{N}^* \setminus A$$

Soit F une partie finie de \mathbb{N}^* . On a

$$\sum_{n \in F} \frac{1}{\sigma(n) + n} = \sum_{n \in F \cap A} \frac{1}{\sigma(n) + n} + \sum_{n \in F \cap B} \frac{1}{\sigma(n) + n}$$

Il existe N entier non nul tel que $F \subset \llbracket 1; N \rrbracket$ puis

$$\sum_{n \in F \cap A} \frac{1}{\sigma(n) + n} \leq \sum_{1 \leq n^2 \leq N} \frac{1}{\sigma(n^2) + n^2} \leq \sum_{1 \leq n^2 \leq N} \frac{1}{n^2} \leq \zeta(2)$$

Puis, les ensembles A et B sont des parties infinies de \mathbb{N}^* donc sont tous deux dénombrables. On note $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow A$ et $\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow B$ des bijections. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sigma(n) = \begin{cases} \psi \circ \varphi^{-1}(n) & \text{si } n \in A \\ \varphi \circ \psi^{-1}(n) & \text{si } n \in B \end{cases}$$

Il s'agit bien d'une permutation de \mathbb{N}^* par construction. L'ensemble $\sigma(F \cap B)$ est une partie finie de A d'où contenue dans $\llbracket 1; M \rrbracket$ avec M entier non nul et par suite

$$\sum_{n \in F \cap B} \frac{1}{\sigma(n) + n} \leq \sum_{n \in F \cap B} \frac{1}{\sigma(n)} \leq \sum_{1 \leq n^2 \leq M} \frac{1}{n^2} \leq \zeta(2)$$

Ainsi, pour ce choix de σ , on a $\sum_{n \in F} \frac{1}{\sigma(n) + n} \leq 2\zeta(2)$ pour toute partie finie F de \mathbb{N}^* . On conclut

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n) + n} \text{ peut converger ou diverger.}$$