ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°37

Exercice 1 (*)

Montrer que $[\,0\,;1\,[$ n'est pas dénombrable.

Corrigé : La fonction $t \mapsto \dfrac{1+\operatorname{th} t}{2}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\,0\,;1\,[$ et comme l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il s'ensuit que $]\,0\,;1\,[$ ne l'est pas non plus. Si l'intervalle $[\,0\,;1\,[$ était dénombrable, alors toute partie de $[\,0\,;1\,[$ serait au plus dénombrable ce qui est faux et on conclut

$$\boxed{\text{L'intervalle } [\,0\,;1\,[\text{ n'est pas dénombrable.}}$$

Exercice 2 (*)

Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{1+mn}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Corrigé : La famille est à termes positifs. Pour n entier non nul fixé, on a

$$\frac{1}{1+mn} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nm} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mn} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m} = +\infty$$

D'après le critère des équivalents, licite pour des familles positives

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{1+mn} = +\infty$$

Et d'après le théorème de Fubini, on conclut

$$\boxed{\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{1+mn} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{1+mn}\right) = +\infty}$$

Exercice 3 (*)

Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{1+m^2n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Corrigé : On a $\qquad \forall (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \qquad 0 \leqslant \dfrac{1}{1+m^2n^2} \leqslant \dfrac{1}{m^2n^2}$

Or, d'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2m^2}\right) = \left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) < +\infty$$

Par comparaison, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{1+m^2n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ est sommable.}}$$

Exercice 4 (*)

Soit $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(b_i)_{i\in \mathrm{I}}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Montrer que la famille $(\sqrt{a_ib_i})_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable.

Corrigé : On a $\quad \forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^2 \qquad \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0 \iff \sqrt{xy}\leqslant \dfrac{|x|+|y|}{2}$

Par conséquent $$\forall i \in \mathrm{I} \qquad \sqrt{a_ib_i}\leqslant \frac{|a_i|+|b_i|}{2}$$

Par comparaison, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (\sqrt{a_ib_i})_{i\in \mathrm{I}} \text{ est sommable.}}$$

Exercice 5 (**)

Soit α réel. Étudier la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$.

Corrigé : Pour $p \geqslant 2$, on pose

$$\mathrm{I}_p = \left\{(n,m)\in \mathbb{N}^{*2} \mid m+n = p\right\} = \{(k,p-k), k \in [\![1\,;\,p-1]\!]\}$$

La famille $(\mathrm{I}_p)_{p\geqslant 2}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^{*2}$. D'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in \mathrm{I}_p}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right) = \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{p^\alpha}\right) = \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{p-1}{p^\alpha}$$

Or, on a $$\frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

D'après le critère des équivalents, licite pour des familles positives, et le critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ est sommable si et seulement si } \alpha > 2.}$$

Exercice 6 (**)

Soient $a > 1$ et $b > 1$. Étudier la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{a^m+b^n}$.

Corrigé : On a $\quad \forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^2 \qquad \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0 \iff 2\sqrt{xy}\leqslant x+y$

D'où $$\forall (m,n)\in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad 0 \leqslant \frac{1}{a^m+b^m} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a^mb^m}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^m \times \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^n$$

Ainsi $$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{a^m+b^n}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ est sommable.}}$$

Exercice 7

Justifier la convergence puis calculer la somme de $\sum \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!} \right)$.

Corrigé : On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{2^n}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2^n}$

Ainsi $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$

La série $\sum a_n$ converge absolument d'après le critère de d'Alembert et la série $\sum b_n$ converge absolument en tant que série géométrique de raison $1/2$. Ainsi, d'après le théorème du produit de Cauchy, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!} \right) \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!} \right) = \left(\sum_{=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \right) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = 2\mathrm{e}^2.}$$

Exercice 8 (**)

Justifier la convergence puis calculer la somme de $\sum \frac{n}{2^n}$.

Corrigé : Posons $a_n = 2^{-n}(1 - \delta_{n,0})$ et $b_n = 2^{-n}$ pour tout n entier. Les séries $\sum a_n = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n}$ et $\sum b_n = \sum 2^{-n}$ sont absolument convergentes en tant que séries géométriques de raison $1/2$ et on a, d'après le théorème de produit de Cauchy, la convergence absolue de

$$\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \sum \sum_{k=1}^{n} 2^{k} - k 2^{-n+k} = \sum \frac{n}{2^n}$$

avec $\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \right)$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La série } \sum \frac{n}{2^n} \text{ converge et on a } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2.}$

Variante : D'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-n} \mathbb{1}_{k \leqslant n} \right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-n} \mathbb{1}_{[\![k\,;+\infty [\![}(n) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \mathbb{1}_{[\![k\,;+\infty [\![}(n) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k+1} = 2 \end{aligned}$$

Remarque : On verra ultérieurement la théorie des *séries entières* qui expédie complètement la question puisqu'on a

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Il suffit ensuite d'évaluer l'égalité en $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 9 (**)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1 - z^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}$$

Corrigé : On a
$$\left|\frac{z^n}{1 - z^{2n}}\right| \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(|z|^n\right)$$

ce qui prouve la convergence absolue de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}$. Puis, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left(\sum_{m=0}^{+\infty} z^{2nm}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} z^{n(2m+1)}\right)$$

Montrons la sommabilité de $\left(z^{n(2m+1)}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$. On trouve

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |z|^{n(2m+1)} = |z|^n \sum_{m=0}^{+\infty} \left(|z|^{2n}\right)^m = \frac{|z|^n}{1 - |z|^{2n}} \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(|z|^n\right)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |z|^{n(2m+1)}\right)$ et donc, d'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs, la sommabilité de $\left(z^{n(2m+1)}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$. D'après le théorème de Fubini, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} z^{n(2m+1)}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n(2m+1)}\right)$$

On conclut
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1 - z^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}}$$

Remarque : Si on préfère écrire des équivalents plutôt que des grand O, il faut distinguer z non nul et z nul.

Exercice 10 (**)

Soit $a > 0$. Montrer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}\,((2n+1)a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\mathrm{sh}\,((2n+1)a)}$$

Corrigé : On a pour n entier

$$\frac{1}{\mathrm{ch}\,((2n+1)a)} = \frac{2\mathrm{e}^{-(2n+1)a}}{1 + \mathrm{e}^{-2(2n+1)a}} = 2\mathrm{e}^{-(2n+1)a} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-2k(2n+1)a}$$

On pose
$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n,k} = 2(-1)^k \mathrm{e}^{-(2n+1)a} \mathrm{e}^{-2k(2n+1)a}$$

Montrons la sommabilité de la famille $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$. Comme $\mathrm{e}^{-2a(2n+1)} \in \left]0\,;1\right[$ pour n entier, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}| = 2\mathrm{e}^{-(2n+1)a} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-2a(2n+1)}\right)^k = \frac{2\mathrm{e}^{-(2n+1)a}}{1 - \mathrm{e}^{-2a(2n+1)}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-(2n+1)a} > 0$$

La série $\sum 2\mathrm{e}^{-(2n+1)a}$ converge ce qui prouve la convergence de $\sum \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}|\right)$ d'après le critère des équivalents, licite pour des familles à termes positifs, et prouve ainsi la sommabilité de

$(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ d'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs. Alors, d'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}\left((2n+1)a\right)} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(2n+1)a}(-1)^k\mathrm{e}^{-2k(2n+1)a}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}2(-1)^k\mathrm{e}^{-(2k+1)(2n+1)a}\right)\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}\left((2n+1)a\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-(2k+1)a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2a(2k+1)}\right)^n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\mathrm{e}^{-(2k+1)a}}{1-\mathrm{e}^{-2a(2k+1)}}$$

On conclut $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}\left((2n+1)a\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\mathrm{sh}\left((2n+1)a\right)}}$$

Exercice 11 (**)

Pour t réel, on note $$\mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{1-t^n}$$

1. Préciser l'ensemble de définition D de S.
2. Montrer $$\forall t\in\mathrm{D}\qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}d(n)\,t^n$$

   où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.

Corrigé : 1. Notons $$\forall (n,t)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}\qquad f_n(t) = \frac{t^n}{1-t^n}$$

L'application f_n n'est pas définie en $t=1$ et en $t=-1$ pour les n impairs. Pour $|t|>1$, on a $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ d'où la divergence grossière de la série définissant S. Enfin, pour $|t|<1$, on a

$$\left|\frac{t^n}{1-t^n}\right| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(|t|^n\right)$$

d'où la convergence absolue de la série. Ainsi

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de S est } \mathrm{D} = \left]-1\,;1\right[.}$$

Remarque : Si on préfère écrire des équivalents plutôt que des grand O, il faut distinguer t non nul et t nul.

2. On a $$\forall t\in\mathrm{D}\qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{1-t^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}t^{kn}\right)$$

Vérifions la sommabilité de la famille $\left(|t|^{kn}\right)_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. Comme $|t|^n<1$ pour n entier non nul, on a

$$\forall n\geqslant 1\qquad \sum_{k=1}^{+\infty}|t|^{kn} = \frac{|t|^n}{1-|t|^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(|t|^n)$$

et comme $\sum_{n\geqslant 1}|t|^n$ converge en tant que série géométrique de raison $|t|<1$, on a bien la sommabilité de $\left(|t|^{kn}\right)_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. Posons

$$\forall p\in\mathbb{N}^*\qquad \mathrm{A}_p = \left\{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\ \mid k\times n = p\right\}$$

La famille $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$ et on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_p = \{(k, p/k),\ k \in [\![1\,;\, p]\!] \quad \text{et} \quad k \text{ divise } p\}$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$\forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} t^{kn} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,n)\in \mathrm{A}_p} t^{kn} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k|p} 1 \right) t^p$$

Autrement dit $\boxed{\forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} d(p) t^p}$

Exercice 12 (*)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sigma(n) + n^2}$
2. $\dfrac{1}{\sigma(n)^2 + n}$

Corrigé : 1. On a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{1}{\sigma(n)+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

d'où $$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)+n^2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{\sigma(n)+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est sommable.}}$$

2. On a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{1}{\sigma(n)^2+n} \leqslant \frac{1}{\sigma(n)^2}$$

Or, on dispose de l'équivalence

$$\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*) \iff \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$$

Et comme on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{\sigma(n)^2+n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est sommable.}}$$