Feuille d'exercices n°40

Exercice 1 (*)

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)^n \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^n}{t^2} \,\mathrm{d}t$

Exercice 2 (*)

Déterminer un équivalent des suites de terme général :

1. $\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+t^n} \,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n} \,\mathrm{d}t$

Exercice 3 (**)

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\displaystyle(-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t$

Exercice 4 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ avec $f(1) \neq 0$.

Déterminer un équivalent simple pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t) \,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (**)

Déterminer les limites de la suite de terme général :

1. $\displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t} \,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+t)} \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n+\mathrm{e}^t}$

Exercice 6 (**)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

Déterminer un développement asymptotique de I_n pour $n \to +\infty$ à une précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 7 (**)

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\,\mathrm{d}t$

2. On rappelle $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

   En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 (*)

Montrer que $$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Exercice 9 (*)

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

Exercice 10 (*)

Montrer que $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$$