ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 16/12/24

Préparation à l'interrogation n°13

1 Croissances comparées

Soient α, $\beta > 0$. On a

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad x^\beta \mathrm{e}^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad x^\alpha \ln(x)^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

2 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
2. $\displaystyle\int^x (1-t)^n \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$

4 Réduction

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \chi_u \text{ scindé et } \forall\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u) \qquad \dim\mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u) \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \pi_u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \exists \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ scindé à racines simples et annulateur de } u \end{aligned}$$

5 Calcul matriciel

Soient $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{A}\mathrm{Y} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j a_{i,j}$$

6 Exercices types

1. Fonction Γ ;
2. Intégrales de Bertrand ;
3. Intégrales de Wallis (voir Aide au test 03) ;
4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

7 Exercice type - Constante γ d'Euler

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Corrigé : On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. On a

$$v_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ d'après le critère de Riemann et comme c'est une série téléscopique, sa convergence équivaut à celle de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'où

$$\boxed{\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad | \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma}$$

8 Exercice type

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ avec n entier non nul et $a \in \mathrm{E}$ normé. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}} p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$.

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$, $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} a$ et $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} x$. On a

$$p_{\mathrm{Vect}\,(a)}(x) = \langle x, a \rangle a$$

Matriciellement $$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{MX} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{A} \rangle \mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^\top \mathrm{X}) = (\mathrm{AA}^\top)\mathrm{X}$$

On trouve $$\boxed{\mathrm{M} = \mathrm{AA}^\top}$$

9 Exercice type

Soit E préhilbertien réel et (x, y, z) une famille libre de vecteurs de E. On note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(y, z)$. Caractériser $p_{\mathrm{F}}(x)$ en exhibant un système linéaire.

Corrigé : On a $p_{\mathrm{F}}(x) \in \mathrm{F}$ d'où $p_{\mathrm{F}}(x) = ay + bz$ avec a, b réels et $x - p_{\mathrm{F}}(x) \in \mathrm{F}^\perp$ d'où

$$\begin{cases} \langle x - p_{\mathrm{F}}(x), y \rangle = 0 \\ \langle x - p_{\mathrm{F}}(x), z \rangle = 0 \end{cases}$$

Ainsi $$\boxed{p_{\mathrm{F}}(x) = ay + bz \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \langle y, y \rangle a + \langle y, z \rangle b = \langle x, y \rangle \\ \langle y, z \rangle a + \langle z, z \rangle b = \langle x, z \rangle \end{cases}}$$

10 Questions de cours

Espaces préhilbertiens, développements en série entière usuels, graphes usuels.