Corrigé du devoir en temps libre n°8

Problème I

On a $$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2$$

d'où $$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \frac{1}{(m+n)^2} \leqslant \frac{1}{m^2+n^2}$$

et par conséquent, les familles étant à termes positifs

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^2} \leqslant \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{m^2+n^2}$$

On pose $$\forall p \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_p = \{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \mid m+n=p\}$$

La famille $(\mathrm{I}_p)_{p\geqslant 2}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$ et on a

$$\forall p \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_p = \{(m,p-m), m \in [\![1\,;\,p-1]\!]\}$$

Par sommation par paquets, il vient

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^2} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{(m,n)\in \mathrm{I}_p} \frac{1}{(m+n)^2} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^2}$$

Or, on a $$\frac{p-1}{p^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p} > 0$$

D'après le critère des équivalents, licite car les termes sont positifs, et le critère de Riemann, on trouve

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^2} = +\infty$$

Par comparaison, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{m^2+n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ n'est pas sommable.}}$$

Problème II

1. On pose $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$$

Pour n entier non nul, on a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ puis $f_n(t) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ d'où l'intégrabilité de f_n sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, l'intégrale définissant } \mathrm{I}_n \text{ est convergente.}}$$

2. D'après le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature et égales en cas de convergence. Comme l'intégrande de v_n est positif, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, l'intégrale } v_n \text{ converge absolument et } v_n = \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{I}_n.}$$

3. Soit n entier non nul et $u \geqslant 0$. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{u}{n}\right)^k \geqslant \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \left(\frac{u}{n}\right)^k$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall u \geqslant 0 \qquad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u}$$

4. Soit $u \geqslant 0$, on a $$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{u}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(\frac{u}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{u+\mathrm{o}(1)}$$

Ainsi $$\boxed{\forall u \geqslant 0 \qquad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^u}$$

5. On pose $$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad g_n(u) = \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n}$$

On observe $$\forall u > 0 \qquad g_n(u) = u^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}$$

et $$\forall (n,v) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant g_n(u) \leqslant \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \frac{1}{u^{1-\frac{1}{\alpha}}(1+u)}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}_+$ avec $\varphi(u) \underset{u\to 0}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}\right)$ et $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}}\right)$ en observant que $1-\dfrac{1}{\alpha} < 1$ et $2-\dfrac{1}{\alpha} > 1$. Par critère de Riemann, la dominante φ est intégrable par convergence dominée, on a

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Remarque : En fait, la fonction φ est l'intégrande de v_1 qui converge absolument.

6. On en déduit $$\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Problème III

1. Le calcul donne $$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta_{p,q}}$$

2. Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$. Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$\int_0^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\mathrm{i}(k+1)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\pi} - 1\right] = \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left[1 - (-1)^{k+1}\right]$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \int_0^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t}$$

Variante : Soit Q tel que $\mathrm{Q}' = \mathrm{P}$. On a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ puis

$$\mathrm{Q}(1) - \mathrm{Q}(-1) = -\left[\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}) - \mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}0})\right] = -\int_0^{\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(1) - \mathrm{Q}(-1) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où l'égalité.

3. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a
$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\int_0^{\pi} \mathrm{P}^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Par inégalité triangulaire, il s'ensuit

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} \left|\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{d}t$$

et on remarque $\overline{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = \mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})$ pour t réel d'où

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t}$$

Par parité de l'intégrande $t \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})$ sur l'intervalle centré $[-\pi\,;\pi]$, il vient

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t}$$

4. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a

$$\int_0^{1} \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t$$

et
$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|^2\,\mathrm{d}t$$

On conclut
$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \int_0^{1} \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2\,\mathrm{d}\theta}$$

5.(a) Soit n entier. On pose $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,\mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q} = \sum_{\ell=0}^{n} |b_\ell|\,\mathrm{X}^\ell$. Il vient par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1} \sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n} |a_k b_\ell|\,t^{k+\ell}\,\mathrm{d}t = \sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n} \frac{|a_k b_\ell|}{k+\ell+1}$$

Par ailleurs, on obtient avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^{1} \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t\int_0^{1} \mathrm{Q}^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec l'inégalité établie à la question précédente, il vient

$$\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n}\frac{|a_kb_\ell|}{k+\ell+1}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2\,\mathrm{d}t}$$

Puis, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|^2\,\mathrm{d}t&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n}|a_ka_\ell|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\ell)t}\,\mathrm{d}t=\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n}|a_ka_\ell|\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\ell)t}\,\mathrm{d}t=2\pi\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2\end{aligned}$$

et de même pour le polynôme Q. Par conséquent, on obtient

$$\boxed{\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n}\frac{|a_kb_\ell|}{k+\ell+1}\leqslant\pi\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2}\sqrt{\sum_{\ell=0}^{n}|b_\ell|\,2}}$$

5.(b) Les familles $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ étant de carrés sommables, les séries $\sum|a_k|^2$ et $\sum|b_\ell|^2$ convergent. On en déduit

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n}\frac{|a_kb_\ell|}{k+\ell+1}\leqslant\pi\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|^2}\sqrt{\sum_{\ell=0}^{+\infty}|b_\ell|\,2}$$

et pour toute partie finie $\mathrm{F}\subset\mathbb{N}^2$, on dispose de n entier tel que $\mathrm{F}\subset[\![\,0\,;\,n\,]\!]^2$ ce qui prouve que l'ensemble $\left\{\sum_{(k,\ell)\in\mathrm{F}}\dfrac{|a_kb_\ell|}{k+\ell+1},\ \mathrm{F}\text{ fini }\subset\mathbb{N}^2\right\}$ est majoré. On conclut

$$\boxed{\text{La famille }\left(\frac{a_kb_\ell}{k+\ell+1}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}\text{ est sommable.}}$$

Remarque : On peut aisément généraliser certains résultats établis précédemment. Pour $\mathrm{P}\in\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{X}^k$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|^2\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\bar{\mathrm{P}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t=\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n}a_k\bar{a}_\ell\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\ell)}\,\mathrm{d}t=2\pi\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2$$

Il s'agit de *l'égalité de Parseval*. Pour $\mathrm{Q}\in\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{Q}=\sum_{\ell=0}^{n}b_\ell\mathrm{X}^\ell$, on a par inégalité triangulaire

$$\left|\int_0^1\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|\mathrm{P}(t)|\,|\mathrm{Q}(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\,t^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}|b_\ell|\,t^\ell\right)\,\mathrm{d}t$$

et on obtient *l'inégalité de Hilbert*

$$\left|\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n}\frac{a_kb_\ell}{k+\ell+1}\right|\leqslant\pi\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2}\sqrt{\sum_{\ell=0}^{n}|b_\ell|\,2}$$