ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°40

Exercice 1 (*)

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \,\mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)^n \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^n}{t^2} \,\mathrm{d}t$

Corrigé : 1. On a $\quad \forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\qquad \sin(t)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \sin(t)^n \leqslant 1$

La dominante $t \mapsto 1$ est intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ d'où, par convergence dominée

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

2. On a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \sin(t)^n \mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} (-1)^n \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t = n\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |\sin(t)^n \mathrm{e}^{-t}| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

La limite simple est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et la dominante est continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité par comparaison et critère de Riemann. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \sin(t)^n \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

3. Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\forall t > 0 \qquad \frac{\sin(t)^n}{t^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{t^2} & \text{si } t = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{|\sin(t)^n|}{t^2} \leqslant \frac{\sin(t)^2}{t^2}$$

La limite simple est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et la dominante est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec $\dfrac{\sin(t)^2}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ et $\dfrac{\sin(t)^2}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur $]\,0\,;1\,]$ par prolongement par continuité et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^n}{t^2} \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 2 (*)

Déterminer un équivalent des suites de terme général :

1. $\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+t^n} \,\mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n \,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n} \,\mathrm{d}t$

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On pose $u = t - 1$ puis $v = nu$ et on trouve

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1+(1+u)^n}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^1 \sqrt{1+\left(1+\frac{v}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}v$$

On pose $\qquad \forall (n,v) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(v) = \sqrt{1+\left(1+\dfrac{v}{n}\right)^n}$

Avec l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$ et le développement $\ln(1+x) = x + \mathrm{o}(x)$, il vient pour n entier non nul

$$\forall v \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n(v) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{1+\mathrm{e}^v} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f_n(v) \leqslant \sqrt{1+\mathrm{e}^v}$$

La dominante est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc intégrable sur $[\,0\,;1\,]$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \sqrt{1+\mathrm{e}^v}\,\mathrm{d}v}$$

Remarque : Avec le changement de variable $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^v}$, on sait calculer l'intégrale.

2. Avec le changement $u = \tan(t)$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Puis, avec le changement $v = u^n$ pour n entier non nul, il vient

$$\int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{v^{\frac{1}{n}}}{1+v^{\frac{2}{n}}}\,\mathrm{d}v$$

Pour $v \in \,]\,0\,;1\,]$ et n entier non nul, on a

$$\frac{v^{\frac{1}{n}}}{1+v^{\frac{2}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{v^{\frac{1}{n}}}{1+v^{\frac{2}{n}}} \leqslant 1$$

La dominante $v \mapsto 1$ est clairement intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et par convergence dominée, on trouve

$$\int_0^1 \frac{v^{\frac{1}{n}}}{1+v^{\frac{2}{n}}}\,\mathrm{d}v \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

D'où $\qquad \boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

3. Soit n entier non nul. On pose $u = t^n$. On trouve

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

On a $\qquad \forall u \geqslant 1 \qquad \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-u}$

La dominante $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$ avec $\mathrm{e}^{-u} \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ d'où son intégrabilité par comparaison et critère de Riemann. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u}$$

Exercice 3 (**)

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $(-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t$

Corrigé : 1. La série vérifie le critère des séries alternées. On utilise le théorème de convergence dominée pour établir la limite nulle avec $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ comme dominante intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \text{ converge.}}$$

2. Soit n entier non nul. On pose $u = t^n$. On trouve

$$\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^{\frac{1}{n}}} u^{\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}u$$

Puis $\qquad \forall u \in \,]\,0\,;1\,] \qquad \dfrac{\ln(u)}{1+u^{\frac{1}{n}}} u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\ln(u)}{2} \quad$ et $\quad 0 \leqslant \left|\dfrac{\ln(u)}{1+u^{\frac{1}{n}}} u^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant -\ln(u)$

La dominante est continue et intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ puisque $-\ln(u) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$. Ainsi, par convergence dominée, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^{\frac{1}{n}}} u^{\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(u) \,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}$$

Finalement $\qquad \boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}$

Exercice 4 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ avec $f(1) \neq 0$.

Déterminer un équivalent simple pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t) \,\mathrm{d}t$.

Corrigé : Soit n entier non nul. On pose $u = t^n$. On a

$$\int_0^1 t^n f(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f(u^{\frac{1}{n}}) u^{\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}u$$

Puis $\qquad \forall u \in \,]\,0\,;1\,] \qquad f(u^{\frac{1}{n}}) u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1) \quad$ et $\quad \left|f(u^{\frac{1}{n}}) u^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \|f\|_\infty$

La dominante $v \mapsto \|f\|_\infty$ est clairement intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et par convergence dominée, il vient

$$\int_0^1 f(u^{\frac{1}{n}}) u^{\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(1) \,\mathrm{d}u = f(1) \neq 0$$

Ainsi $\qquad \boxed{\displaystyle\int_0^1 t^n f(t) \,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}}$

Exercice 5 (**)

Déterminer les limites de la suite de terme général :

1. $\displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+t)}\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n+\mathrm{e}^t}$

Corrigé : 1. On pose

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad f_n(t) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t} & \text{si } t \in [\,0\,;n\,] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Pour $t \geqslant 0$, on a $t \in [\,0\,;n\,]$ pour n assez grand et avec l'inégalité de concavité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)}\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{t+\mathrm{o}(1)}\mathrm{e}^{-2t} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-t}$$

avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, par convergence dominée

$$\boxed{\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1}$$

2. On pose $$\forall t \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 2 \qquad f_n(t) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(t+k)}$$

Pour $n \geqslant 2$, on a $$\forall t \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1\times 2}{(t+1)(t+2)}$$

qui fournit une dominante intégrable indépendante de n. Puis on écrit

$$\forall t > 0 \qquad f_n(t) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{t}{k}\right)\right)$$

Or $$\forall t > 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{t}{k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

puisqu'il s'agit d'une somme partielle de série positive divergente avec $\ln\left(1+\dfrac{t}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{k}$. On en déduit $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $t > 0$ et par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

3. On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^n+\mathrm{e}^t} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n+\mathrm{e}^t}$$

On a $$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \frac{1}{t^n+\mathrm{e}^t} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{1}{t^n+\mathrm{e}^t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

puis $$\forall t > 1 \qquad \frac{1}{t^n+\mathrm{e}^t} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{1}{t^n+\mathrm{e}^t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[\,0\,;1\,[$ et sur $]\,1\,;+\infty\,[$, par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n+\mathrm{e}^t} = \mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 6 (**)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

Déterminer un développement asymptotique de I_n pour $n \to +\infty$ à une précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Corrigé : Pour $t \in [\,0\,;1\,[$, on a
$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{1+t^n} \leqslant 1$$
avec $t \mapsto 1$ intégrable sur $[\,0\,;1\,[$. Par convergence dominée, il vient
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$$

Puis $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n - 1 = -\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

Pour n entier non nul, on pose $u = t^n$. Il vient
$$\mathrm{I}_n - 1 = -\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

Pour $u \in \,]\,0\,;1\,]$, on a
$$\frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+u} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} \leqslant 1$$
Comme $v \mapsto 1$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$, il vient par convergence dominée
$$n(\mathrm{I}_n - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = -\ln(2)$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{I}_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Variante : On peut aussi réaliser une intégration par parties sur $\mathrm{I}_n - 1$ avec n entier non nul. On a
$$\mathrm{I}_n - 1 = -\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^n}t\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t}{n}\ln(1+t^n)\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$
Avec l'inégalité de concavité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u > -1$, on établit que l'intégrale est de limite nulle et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 7 (**)

1. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

2. On rappelle $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

   En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On pose $u = \cos(t)$ puis $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ et on obtient

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t}$$

2. On pose $\qquad \forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(t) = \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[\,0\,;\sqrt{n}\,]}(t)$

On a pour $t \geqslant 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t^2} \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$

d'après l'inégalité de concavité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u \in [\,0\,;1\,[$. Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ puisque $\mathrm{e}^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, on conclut par convergence dominée

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec l'équivalent
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Exercice 8 (*)

Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Corrigé : On a
$$\forall t > 0 \qquad \frac{t^2}{\mathrm{e}^t-1} = t^2\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$$

Pour n entier, on a $f_n : t \mapsto t^2\mathrm{e}^{-(n+1)t} \in \mathscr{C}(\,]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$, prolongeable par continuité en 0 et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par double intégration par parties, les crochets étant finis nuls, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)^3}$$

Ainsi, la série $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|t^2\mathrm{e}^{-(n+1)t}\right|\,\mathrm{d}t = \sum \dfrac{2}{(n+1)^3}$ converge par critère de Riemann et par intégration terme à terme, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-(n+1)t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}}$$

Exercice 9 (*)

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

Corrigé : Pour $t > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(1+t^2)^n}$ converge avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{t^2}$. Supposons la série

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ convergente. D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $t\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}$ est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Cette intégrale étant clairement divergente, on en déduit que l'hypothèse est fausse et on conclut

$$\boxed{\text{La série }\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}\text{ diverge.}}$$

Exercice 10 (*)

Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : On a
$$\forall t\in\,]\,0\,;1\,[\qquad \frac{\ln(t)}{t-1}=-\ln(t)\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$$

Pour n entier, on a $t\mapsto t^n\ln(t)\in\mathscr{C}(]\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$ avec $t^n\ln(t)\underset{t\to 0}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées d'où son intégrabilité et en intégrant par parties, tous les crochets sont finis, nuls et on a

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \int_0^1 t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{(n+1)^2}$$

Comme $\displaystyle\sum\int_0^1|t^n\ln(t)|\,\mathrm{d}t=\sum\frac{1}{(n+1)^2}$ converge par critère de Riemann, on conclut en intégrant terme à terme

$$\boxed{\int_0^1\frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}-t^n\ln(t)\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1-t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}}$$