Feuille d'exercices n°41

Exercice 1 (***)

Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t+\ldots+t^{n-1}}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : On a $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{1-t^n}\,\mathrm{d}t$$

Soit n entier non nul. Avec le changement de variables $u = t^n$, on obtient

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{1-u} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

On a $$\forall u \in \left]0\,;1\right[\qquad n\frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{1-u}u^{\frac{1}{n}} = n\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{n}}}{1-u}u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-\ln(u)}{1-u}$$

et avec l'inégalité de convexité $1-\mathrm{e}^x \leqslant -x$ pour tout x réel, on obtient

$$\forall u \in \left]0\,;1\right[\qquad 0 \leqslant n\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{n}}}{1-u}u^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{-\ln(u)}{1-u}$$

La dominante $u \mapsto \dfrac{-\ln(u)}{1-u}$ est continue sur $\left]0\,;1\right[$, prolongeable par continuité en 1 et vérifiant $\dfrac{-\ln(u)}{1-u} \underset{u\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ d'où son intégrabilité sur $\left]0\,;1\right[$. Par convergence dominée , on en déduit

$$n^2\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u}$$

Exercice 2 (***)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \left]0\,;+\infty\right[\qquad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \mathbb{1}_{[0\,;n]}(t)$$

On a $$\forall t > 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$$

En développant le binôme, on montre

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall t > 0 \qquad \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \geqslant 1+t$$

Ainsi $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \left]\, 0\,;+\infty\, \right[\qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

Et cette dominante est intégrable sur $\left]\, 0\,;+\infty\,\right[$ puisque $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$.
Ainsi, par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 3 (***)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \cos\left(\frac{t}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}t$$

Corrigé : On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(t) = \cos\left(\frac{t}{n}\right)^{n^2} \mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]}(t)$$

On admet que $[\,0\,;1\,] \subset \left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$ ce qui justifie que f_n est à valeurs dans $\left]\,0\,;+\infty\,\right[$. Soit $t \geqslant 0$. Pour $n \geqslant t$, on a

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{n^2 \ln\cos\left(\frac{t}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(1-\frac{t^2}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

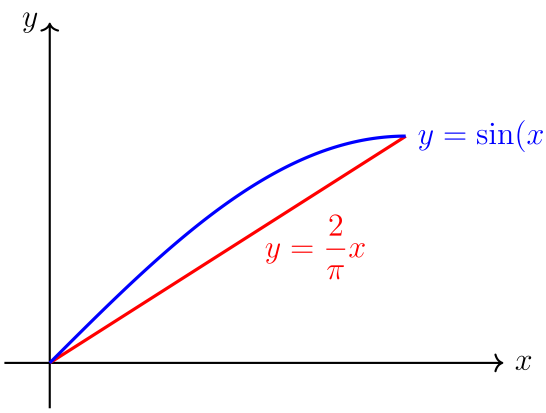
Il faut ensuit majorer un peu finement le cos. Par concavité et position graphe/corde, on a

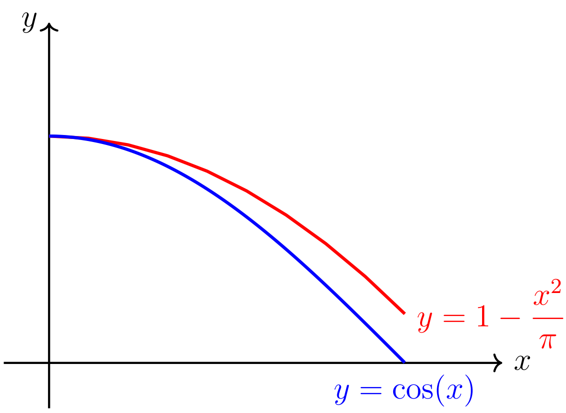
$$\forall u \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \qquad \sin(u) \geqslant \frac{2}{\pi}u$$

et après intégration

$$\forall u \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \qquad \int_0^u \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1-\cos(u) \geqslant \int_0^u \frac{2}{\pi}t\,\mathrm{d}t = \frac{u^2}{\pi}$$

autrement dit $$\forall u \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \qquad 1-\frac{u^2}{\pi} \geqslant \cos(u)$$





Il s'ensuit, en combinant l'inégalité précédente avec l'inégalité de concavité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u < 1$

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(1-\frac{t^2}{\pi n^2}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\pi}}$$

l'inégalité étant trivialement réalisée pour $t > n$. La dominante $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\pi}}$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ avec $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\pi}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^n \cos\left(\frac{t}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}$$

Remarque : On peut aussi procéder avec l'inégalité de Taylor-Lagrange en utilisant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \leqslant \frac{t^4}{4!}$$

Ainsi, pour n entier non nul et $t \in [\,0\,;n\,]$

$$\begin{aligned} n^2 \ln\cos\left(\frac{t}{n}\right) &\leqslant n^2\left(\cos\left(\frac{t}{n}\right) - 1\right) \\ &\leqslant -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!n^2} \leqslant -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4!} \end{aligned}$$

ce qui fournit ensuite une dominante intégrable.

Exercice 4 (***)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{t\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{t\sqrt{n}} \mathbb{1}_{[\,0\,;\sqrt{n}\,]}(t)$$

Pour $t \geqslant 0$ et $n \geqslant t$, on a

$$f_n(t) = \exp\left[n\ln\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) + t\sqrt{n}\right] = \exp\left[n\left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + t\sqrt{n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

L'inégalité classique de concavité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u < 1$ ne suffit pas puisqu'elle fournit simplement $f_n(t) \leqslant 1$ pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, dominante qui n'est pas intégrable. On pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad h(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}$$

La fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ par théorèmes généraux avec

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad h'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + x = -\frac{x^2}{1-x}$$

Pour $x \in [\,0\,;1\,[$, on a clairement $h'(x) \leqslant 0$ et par conséquent h décroît avec $h(0) = 0$ d'où

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \ln(1-x) \leqslant -x - \frac{x^2}{2}$$

On en déduit $$\forall t \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

La dominante $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{t\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}$$

Remarque : On verra lors de l'étude des *séries entières* qu'on dispose de l'égalité

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ainsi $$\forall x \in \left[0\,;1\right[\qquad \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} = -\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \leqslant 0$$

d'où le choix précédent pour la dominante.

Exercice 5 (**)

Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \left]0\,;+\infty\right[$. On pose

$$u_n(x) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n} (x+k)} \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{I}_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que $\Gamma(x)$ est bien définie pour $x > 0$.
2. Montrer $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{I}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)$$
3. En déduire un équivalent simple de $u_n(x)$ pour $x > 0$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit $x > 0$. On a $f : t \mapsto t^x \mathrm{e}^{-t} \in \mathscr{C}_{pm}(\left]0\,;+\infty\right[, \mathbb{R})$ avec

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{1-x}}\right) \qquad \text{et} \qquad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi, la fonction f intégrable sur $\left]0\,;1\right]$ et $\left[1\,;+\infty\right[$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est bien définie sur } \left]0\,;+\infty\right[.}$$

2. On pose $$\forall (t,n) \in \left]0\,;+\infty\right[\times \mathbb{N}^* \qquad f_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{\left]0\,;n\right[}(t)$$

Clairement $$\forall t > 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

Avec l'inégalité classique $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u > -1$, on obtient

$$\forall (t,n) \in \left]0\,;+\infty\right[\times \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant f_n(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \mathbb{1}_{\left]0\,;n\right[}(t) \leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

Par convergence dominée $$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{I}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)}$$

3. Avec le changement de variables $t = nu$, on obtient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{I}_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u$$

Après n intégrations par parties, il vient

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)} \int_0^1 u^{x+n-1}\,\mathrm{d}u = \frac{u_n(x)}{x}$$

Par conséquent $$\boxed{\forall x > 0 \qquad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\Gamma(x)}{n^x}}$$

Exercice 6 (***)

On pose $\qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \,\mathrm{d}t$

1. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, déterminer une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ avec des factorielles.
2. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Corrigé : 1. En intégrant par parties (fonctions $\mathscr{C}^1$), il vient

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1}\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit $\qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,q-1}$

Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q \times (q-1) \times \ldots \times 1}{(p+1) \times (p+2) \times \ldots \times (p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0}$$

avec $\qquad \mathrm{I}_{p+q,0} = \displaystyle\int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}$

puis $\qquad \mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{1 \times \ldots \times (p-1) \times p \times q!}{1 \times \ldots \times p \times (p+1) \times \ldots \times (p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0} = \dfrac{p!\,q!}{(p+q)!}\dfrac{1}{(p+q+1)}$

D'où $\qquad \boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}}$

2. Notons $u_n = \mathrm{I}_{n,n}$ pour n entier. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

et $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+3}\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{4}$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge. On veut ensuite calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$$

Comme $\sum t^n(1-t)^n$ converge pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$ avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n(1-t)^n = \frac{1}{1-t(1-t)}$ et comme $\displaystyle\sum\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$ converge, il vient d'après le théorème d'intégration terme à terme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t(1-t)}$$

Enfin, par les techniques habituelles de calcul intégral, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t(1-t)} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+3/4} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3/4} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3/4} = 2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On conclut $\boxed{\text{La série } \sum \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \text{ converge et sa somme vaut } \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}.}$

Remarque : Pour n entier, avec l'égalité $u_n = \displaystyle\int_0^1 (t(1-t))^n \,\mathrm{d}t$, on peut observer

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{4^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4^n}$$

ce qui prouve la convergence de $\sum u_n$ par comparaison.

Exercice 7 (****)

On pose $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$

1. Justifier que la suite $(u_n)_n$ est bien définie puis déterminer un développement asymptotique à trois termes pour $n \to +\infty$.
2. Montrer la convergence de la série $\sum(u_n - 1)$ puis déterminer un équivalent simple de son reste d'ordre n.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall t \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 2 \qquad f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$

Pour $n \geqslant 2$, on a $f_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n}$. Ainsi, d'après le critère de Riemann, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ce qui prouve que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ est bien définie.}}$$

Selon la position de t vis-à-vis de 1, la limite simple de $(f_n(t))_n$ n'est pas la même. D'après la relation de Chasles, on a

$$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

On a $\qquad \forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \dfrac{1}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^n} \leqslant 1$

La fonction constante égale à 1 est intégrale sur l'intervalle $[\,0\,;1\,[$ d'où, par convergence dominée

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$$

Puis $\qquad \forall t > 1 \qquad \dfrac{1}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$

La dominante $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]\,1\,;+\infty\,[$ d'où, par convergence dominée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $\qquad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

On va donc s'intéresser au comportement asymptotique de la suite $(u_n - 1)_n$. Soit n entier non nul. Avec le changement de variable $u = 1/t$, on obtient

$$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} + \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{1+u^n}\,\mathrm{d}u$$

d'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} - 1 = \int_0^1 \frac{u^n(1-u^2)}{1+u^{n+2}}\,\mathrm{d}u$$

Avec le changement de variables $t = u^n$, on obtient

$$u_{n+2} - 1 = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-t^{\frac{2}{n}}}{1+t^{1+\frac{2}{n}}}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln(t)}\right)}{1+t^{1+\frac{2}{n}}}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t$$

On a $$\forall t \in]\,0\,;1\,] \qquad \frac{n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln(t)}\right)}{1+t^{1+\frac{2}{n}}}t^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-2\ln(t)}{1+t}$$

On a $1-\mathrm{e}^x \leqslant -x$ pour tout x réel par inégalité de concavité et par suite

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \forall t \in]\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \frac{n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln(t)}\right)}{1+t^{1+\frac{2}{n}}}t^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{-2\ln(t)}{1+t^2}$$

La dominante est continue sur $]\,0\,;1\,]$ et on a $\dfrac{-2\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ d'où son intégrabilité. Par convergence dominée, il vient

$$n^2(u_{n+2}-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{-2\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{2}{n^2}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

2. On a $$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum(u_n-1)$ converge. Puis, par sommation des relations de comparaison, comme

$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

il vient $$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

et par comparaison série/intégrale, on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n}$$

On conclut $$\boxed{\text{La série } \sum(u_n-1) \text{ converge et } \sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

Remarque : Avec l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} - 1 = \int_0^1 \frac{u^n(1-u^2)}{1+u^{n+2}}\,\mathrm{d}u$$

on obtient l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+2} - 1 \leqslant \int_0^1 u^n(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui suffit à prouver la convergence de $\sum(u_n - 1)$ mais est en revanche insuffisant pour un équivalent du reste.