ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°54

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul. On suppose M trigonalisable dans E. Montrer que M admet une base orthonormée de trigonalisation.

Corrigé : On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, f l'endomorphisme canoniquement associé à M, $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de trigonalisation de M, $\mathscr{L} = (v_1, \ldots, v_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de $(u_1, \ldots, u_n)$. En utilisant la relation

$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k)$$

il vient $\qquad \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad f(v_i) \in f(\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_i)) = f(\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i))$

et comme $\mathscr{B}$ est une base de trigonalisation

$$f(\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i)) \subset \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i) = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_i)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{T} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}} f \text{ est triangulaire supérieure avec } \mathscr{L} \text{ base orthonormée de } \mathbb{R}^n.}$$

Exercice 2 (**)

Soit E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Im}\ q \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$$

Corrigé : Supposons $\|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Il en résulte que $\mathrm{Ker}\ q \subset \mathrm{Ker}\ p$ et par suite

$$\mathrm{Im}\ p = (\mathrm{Ker}\ p)^{\perp} \subset (\mathrm{Ker}\ q)^{\perp} = \mathrm{Im}\ p$$

Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Im}\ q$. On a $\mathrm{Ker}\ q = (\mathrm{Im}\ q)^{\perp} \subset (\mathrm{Im}\ p)^{\perp} = \mathrm{Ker}\ p$. Soit $x \in \mathrm{E}$. On observe que

$$q(x) = p(x) + q(x) - p(x) \quad \text{et} \quad q(x) - p(x) = \underbrace{q(x) - x}_{\in \mathrm{Ker}\ q} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}\ p} \in \mathrm{Ker}\ p$$

D'après le théorème de Pythagore

$$\|q(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|q(x) - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$$

Ainsi $\qquad \boxed{\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Im}\ q \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|}$

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien de dimension n.

1. Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_{n+1}$ dans E tels que

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;\, n+1]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

2. Soient $x_1, \ldots, x_p$ dans E vérifiant

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,p]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

(a) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$. Montrer $\sum\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i = 0$.

(b) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ vérifiant $f(x_i) > 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

(c) En déduire $p \leqslant n+1$.

Corrigé : 1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Pour des raisons de symétrie et après expérimentation et dessin dans le cas $n = 2$, on cherche les x_i de la forme $x_{n+1} = -\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ et $x_i = e_i + x_{n+1}$ pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$.

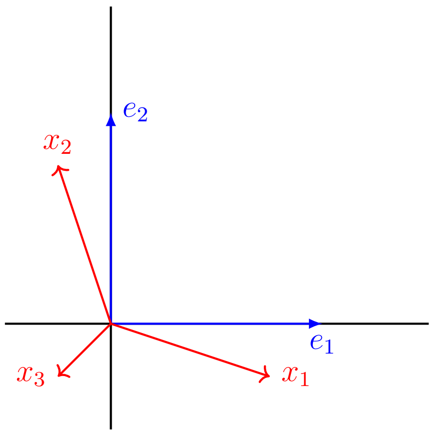

Figure 1 – Famille obtusangle dans $\mathbb{R}^2$

Pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on trouve

$$\langle x_i, x_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle + \langle e_i, x_{n+1} \rangle + \langle e_j, x_{n+1} \rangle + \|x_{n+1}\|^2 = -2\lambda + n\lambda^2$$

et
$$\langle x_i, x_{n+1} \rangle = \langle e_i, x_{n+1} \rangle + \|x_{n+1}\|^2 = -\lambda + n\lambda^2$$

Ceci impose $\lambda \in \left]\, 0\,;\, \dfrac{2}{n} \right[$ et $\lambda \in \left]\, 0\,;\, \dfrac{1}{n} \right[$. Ainsi, pour $\lambda \in \left]\, 0\,;\, \dfrac{1}{n} \right[$, on a

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n+1]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0}$$

Remarque : Une telle famille est dite *obtusangle*.

2.(a) On a
$$\|\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} |\alpha_i \alpha_j| \langle x_i, x_j \rangle$$

Comme $\langle x_i, x_j \rangle < 0$, pour $i \neq j$, il vient pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,p]\!]^2$

$$\alpha_i \alpha_j \leqslant |\alpha_i \alpha_j| \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle \geqslant |\alpha_i \alpha_j| \langle x_i, x_j \rangle$$

Après sommation, on obtient

$$\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle \geqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} |\alpha_i \alpha_j| \langle x_i, x_j \rangle = \|\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i\|^2$$

On conclut
$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i = 0}$$

2.(b) Soit α_1, ..., α_p réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i x_i = 0$. D'après le résultat de la question précédente, on a $\sum\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i = 0$ puis, par linéarité de f

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| \underbrace{f(x_i)}_{>0} = 0$$

On en déduit clairement la nullité des α_i et on conclut

$$\boxed{\text{S'il existe } f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}) \text{ telle que } f(x_i) > 0 \text{ pour tout } i \in [\![1\,;\,p]\!], \text{ alors } (x_1, \ldots, x_p) \text{ est libre.}}$$

2.(c) On suppose $p > 1$ sinon c'est trivial. On pose $f(x) = -\langle x, x_p\rangle$ pour $x \in \mathrm{E}$. On a clairement $f(x_i) > 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\,p-1]\!]$ et $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ est obtusangle. D'après le résultat de la question précédente, c'est une famille libre et on conclut

$$\boxed{p \leqslant n+1}$$

Exercice 4 (***)

Soit E espace préhilbertien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. On suppose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2$$

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les e_i sont unitaires.
3. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Corrigé : 1. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$. On a clairement $\mathrm{F}^{\perp} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ d'où $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La famille } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base de E.}}$$

2. Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. On a

$$\|e_k\|^2 = \|e_k\|^4 + \sum_{i \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{k\}} \langle e_i, ek\rangle^2 \geqslant \|e_k\|^4 \quad \Longrightarrow \quad \|e_k\| \leqslant 1$$

Supposons qu'il existe $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $\|e_k\| < 1$. Pour $x \in \mathrm{Vect}\,(e_i)^{\perp}_{i \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{k\}}$ avec $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ (choix possible dans un hyperplan), on a

$$\|x\|^2 = \langle x, e_k\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|e_k\|^2 < \|x\|^2$$

ce qui est absurde. Il s'ensuit que $\|e_k\| \geqslant 1$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ d'où

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \|e_i\| = 1}$$

3. Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. On a

$$\|e_k\|^2 = \|e_k\|^4 + \sum_{i \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{k\}} \langle e_i, ek\rangle^2 \geqslant \|e_k\|^4 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{k\}} \langle e_i, ek\rangle^2 = 0$$

On conclut $\boxed{\text{La famille } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base orthonormée de E.}}$

Exercice 5 (***)

Soit E euclidien. Montrer que $\{(x,y) \in \mathrm{E}^2 \mid (x,y) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2.

Corrigé : On note $\mathrm{E}^2 \setminus \mathrm{U} = \{(x,y) \in \mathrm{E}^2 \mid (x,y) \text{ libre}\}$. D'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathrm{U} = \{(x,y) \in \mathrm{E}^2 \mid \|x\|\|y\| - |\langle x,y\rangle| = 0\}$$

On pose
$$f\colon \begin{cases} \mathrm{E}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \|x\|\|y\| - |\langle x,y\rangle| \end{cases}$$

L'application $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ est bilinéaire sur un produit d'espaces de dimension finie et est donc continue d'où la continuité de $(x,y) \mapsto |\langle x,y\rangle|$ par composition avec la valeur absolue. Les applications $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$ et $\|\cdot\|$ sont continues d'où la continuité de $(x,y) \mapsto \|x\|$ et $(x,y) \mapsto \|y\|$ et $(u,v) \mapsto uv$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ d'où, par composition, la continuité de $(x,y) \mapsto \|x\|\|y\|$. Ainsi, l'application f est continue et on a $\mathrm{E}^2 \setminus \mathrm{U} = f^{-1}(\{0\})$ qui est fermé comme image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble U est un ouvert de } \mathrm{E}^2.}$$

Exercice 6 (****)

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-ev normé. Montrer

$$\|\cdot\| \text{ est une norme euclidienne} \iff \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Corrigé : Le sens direct est immédiat, c'est l'identité du parallélogramme. Réciproquement, on pose

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

Si $\|\cdot\|$ est effectivement euclidienne, le produit scalaire s'obtient par polarisation d'où le choix précédent. On a clairement φ symétrique, définie, positive. Reste à établir le caractère bilinéaire ou simplement linéaire en la première variable par symétrie. Soit $(x,y,z) \in \mathrm{E}^3$. On a

$$\varphi(2x,y) = \|x + \frac{y}{2}\|^2 - \|x - \frac{y}{2}\|^2$$

Puis, par identité du parallélogramme, il vient

$$\|x + \frac{y}{2}\|^2 = \|\frac{x}{2} + \frac{x+y}{2}\|^2 = 2\left(\|\frac{x}{2}\|^2 + \|\frac{x+y}{2}\|^2\right) - \|\frac{x}{2} - \frac{x+y}{2}\|^2$$

puis
$$\|x - \frac{y}{2}\|^2 = \|\frac{x}{2} + \frac{x-y}{2}\|^2 = 2\left(\|\frac{x}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2\right) - \|\frac{x}{2} - \frac{x-y}{2}\|^2$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$\varphi(2x,x) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = 2\varphi(x,y)$$

Ensuite, on a

$$\varphi(x,y) + \varphi(z,y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|z+y\|^2 - \|z-y\|^2\right]$$

Et par identité du parallélogramme, on trouve

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|z+y\|^2 - \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\left[\|x+z+2y\|^2 + \|x-z\|^2 - \|x+z-2y\|^2 - \|x-z\|^2\right]$$

autrement dit

$$\varphi(x,y)+\varphi(z,y)=\frac{1}{2}\varphi(x+z,2y)=\varphi(x+z,y)$$

la dernière égalité résultant de la propriété précédente. Fixons $y\in \mathrm{E}$ et notons $\varphi_y : x\mapsto \varphi(x,y)$. On a

$$\forall (x,z)\in \mathrm{E}^2 \qquad \varphi_y(x+z)=\varphi_y(x)+\varphi_y(z)$$

Par récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (n,x)\in \mathbb{N}\times \mathrm{E} \qquad \varphi_y(nx)=n\varphi_y(x)$$

puis $$\forall x\in \mathrm{E} \qquad \varphi_y(x-x)=\varphi_y(x)+\varphi_y(-x)=0$$

et par suite $$\forall (n,x)\in \mathbb{Z}\times \mathrm{E} \qquad \varphi_y(nx)=n\varphi_y(x)$$

Ensuite $$\forall (p,q,x)\in \mathbb{Z}\times \mathbb{N}^*\times \mathrm{E} \qquad \varphi_y\left(q\frac{p}{q}x\right)=p\varphi_y(x)=q\varphi_y\left(\frac{p}{q}x\right)$$

d'où $$\forall (r,x)\in \mathbb{Q}\times \mathrm{E} \qquad \varphi_y(rx)=r\varphi_y(x)$$

Enfin, l'application $x\mapsto \varphi_y(x)$ est continue comme composée d'applications continues. Ainsi, pour $x\in \mathrm{E}$, les applications $\lambda\mapsto \lambda\varphi_y(x)$ et $\lambda\mapsto\varphi_y(\lambda x)$ sont continues et coincident sur $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ d'où

$$\forall (\lambda,x)\in \mathbb{R}\times \mathrm{E} \qquad \varphi(\lambda x,y)=\varphi_y(\lambda x)=\lambda\varphi_y(x)=\lambda\varphi(x,y)$$

On peut donc conclure que φ est linéaire en la première variable et il s'agit donc d'un produit scalaire. Ainsi, on a

$$\boxed{\|\cdot\| \text{ est une norme euclidienne} \iff \forall (x,y)\in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)}$$

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie. On pose

$$\mu(\mathrm{E},\|\cdot\|)=\operatorname*{Sup}_{(x,y)\in \mathrm{E}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)}$$

1. Montrer $$1\leqslant \mu(\mathrm{E},\|\cdot\|)\leqslant 2$$
2. Calculer $\mu(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_1)$ et $\mu(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$.
3. Montrer $\quad\|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur E $\iff \mu(\mathrm{E},\|\cdot\|)=1$

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2\smallsetminus\{(0,0)\} \qquad \mathrm{R}(x,y,\|\cdot\|)=\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)}$$

Soit $(x,y)\in \mathrm{E}^2$. Par inégalité triangulaire et identité remarquable, on a

$$\|x+y\|^2\leqslant (\|x\|+\|y\|)^2\leqslant 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

et $$\|x-y\|^2\leqslant (\|x\|+\|y\|)^2\leqslant 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

d'où $$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\leqslant 4\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

Par conséquent, pour $(x,y) \neq (0,0)$ $\qquad \mathrm{R}(x,y,\|\cdot\|) \leqslant 2$

Ainsi, la borne supérieure définissant $\mu(\mathrm{E},\|\cdot\|)$ est finie avec

$$\mu(\mathrm{E},\|\cdot\|) \leqslant 2$$

Pour $x \neq 0$ et $y = 0$, on trouve

$$1 = \frac{\|x+0\|^2 + \|x-0\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|0\|^2\right)} \leqslant \mu(\mathrm{E},\|\cdot\|)$$

On conclut $\qquad \boxed{1 \leqslant \mu(\mathrm{E},\|\cdot\|) \leqslant 2}$

2. Avec $x = (1,0,\ldots,0)$ et $y = (0,1,0,\ldots,0)$, on trouve

$$\mathrm{R}(x,y,\|\cdot\|_1) = \frac{2^2+2^2}{2(1^2+1^2)} = 2$$

Avec $x = (1,1,0,\ldots,0)$ et $y = (1,-1,0,\ldots,0)$, on trouve

$$\mathrm{R}(x,y,\|\cdot\|_\infty) = \frac{2^2+2^2}{2(1^2+1^2)} = 2$$

Ainsi $\qquad \boxed{\mu(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_1) = \mu(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty) = 2}$

3. Supposons $\|\cdot\|$ euclidienne. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il vient

$$\mathrm{R}(x,y,\|\cdot\|) = \frac{\|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2}{2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)} = 1$$

d'où $\qquad \mu(\mathrm{E},\|\cdot\|) = 1$

Réciproquement, supposons $\mu(\mathrm{E},\|\cdot\|) = 1$. On a

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leqslant 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Soit $(u,v) \in \mathrm{E}^2$. Avec $x = \dfrac{u+v}{2}$ et $y = \dfrac{u-v}{2}$, on trouve

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \leqslant \frac{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2}{2}$$

Autrement dit, cela prouve l'égalité

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Ainsi, la norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme. D'après le résultat de l'exercice 6 feuille 54 (exercice difficile !), on conclut que la norme est euclidienne. Ainsi

$$\boxed{\|\cdot\| \text{ est une norme euclidienne sur E} \iff \mu(\mathrm{E},\|\cdot\|) = 1}$$