ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°52

Exercice 1 (**)

Soit $n \geqslant 2$. Établir les inégalités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$
2. $\forall f \in \mathscr{C}^0([-1\,;1\,], \mathbb{R}) \qquad \displaystyle\left(\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
3. $\forall (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \qquad \displaystyle\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k)$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$.

1. Justifier $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Construire une base orthonormée de E.

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$.
On pose $\mathrm{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Justifier que F est un sev de E et en préciser une base.
2. Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, calculer $\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{F}^\perp$.

Exercice 4 (**)

Soit E préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs normés de E telle que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 = \|x\|^2$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et que E est donc euclidien.

Exercice 5 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ avec n entier non nul.

1. Soit $a \in \mathrm{E}$ normé. Déterminer la matrice dans la base canonique de $p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ et $p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}$.
2. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ orthonormée et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de p_{F}.

Exercice 6 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E.

1. Déterminer $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}$.
2. En déduire $(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^{\perp}$.

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{E}=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^{\top}\mathrm{B})$ pour $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathrm{E}^2$.

1. Montrer $$\mathrm{E}=\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$
2. Soit $\mathrm{A}=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M}\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2$.
3. Pour $\mathrm{H}=\mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$, calculer $\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathrm{H})$ pour $\mathrm{M}\in\mathrm{E}$.

Exercice 8 (*)

Soit E préhilbertien réel et $(u,a)\in\mathrm{E}^2$. Déterminer de deux manières différentes

$$\operatorname*{Inf}_{t\in\mathbb{R}}\|u-ta\|^2$$

Exercice 9 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1\left(1+at+bt^2\right)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 (**)

Soit E euclidien avec $\dim\mathrm{E}=n\geqslant 2$ et (u,v) une famille libre de vecteurs de E. On pose

$$\forall x\in\mathrm{E}\qquad f(x)=\langle u,x\rangle v+\langle v,x\rangle u$$

1. Montrer que $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f possède $n-2$ colonnes nulles.
3. En déduire les valeurs propres de f.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 11 (**)

Soit E préhilbertien réel et F sev de E. Montrer que $\mathrm{F}^{\perp}=\bar{\mathrm{F}}^{\perp}$.

Exercice 12 (**)

Soit E préhilbertien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$p\circ q=0\iff q\circ p=0$$