Feuille d'exercices n°53

Exercice 1 (**)

Soit E préhilbertien, F un sev de E de dimension finie et $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de F. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $y = p_{\mathrm{F}}(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i u_i$ avec les a_i réels. On pose

$$\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \langle x, u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, u_p\rangle \end{pmatrix}$$

Établir $$\mathrm{G} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \mathrm{G}^{-1}\mathrm{X}$$

Exercice 2 (**)

Soit E préhilbertien réel, n entier non nul, une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et une matrice $\mathrm{G} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec $p \leqslant n$ telle que $\mathrm{G} = \mathrm{A}^\top\mathrm{A}$.
2. Justifier l'égalité $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\big) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{M})$
3. En déduire une relation entre $\mathrm{rg}\,(\mathrm{G})$ et $\mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_n)$.

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

1. Montrer que $\quad \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$ pour $x \in \mathrm{E}$.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p et $\mathrm{B} \in \mathrm{E}$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ rendant minimum $\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2$ et préciser ce X_0.

Exercice 5 (***)

Soit E préhilbertien réel et $(e_n)_n$ une famille orthonormale de E. Montrer l'équivalence :

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x\rangle^2 \iff x \in \overline{\mathrm{Vect}\,(e_n)_n}$$

Exercice 6 (***)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [(x^2-1)^n] \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} \mathrm{P}_n$

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([-1\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$.

1. Pour n entier, déterminer le degré et coefficient dominant de P_n puis calculer $\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^k \rangle$ avec $k \in [\![0\,; n]\!]$.
2. En déduire que $(\mathrm{U}_n)_n$ est une famille orthonormale de E et que $\overline{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}_n)_n} = \mathrm{E}$.

Exercice 7 (***)

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paires et 2π-périodiques. On pose :

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose $\qquad c_0 : t \mapsto 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1 \qquad c_n : t \mapsto \sqrt{2}\cos(nt)$

1. Vérifier que $(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad | \quad \|f - \mathrm{P} \circ \cos\|_{\infty,[\,0\,;\pi\,]} \leqslant \varepsilon$$
3. Montrer que $(c_n)_n$ est une famille orthonormale de E et que $\overline{\mathrm{Vect}\,(c_n)_n} = \mathrm{E}$.

Exercice 8 (****)

Soit E euclidien et C un convexe fermé non vide de E.

1. Soient x, a et b dans E tels que $a \neq b$ et $\|x-a\| = \|x-b\|$. Montrer
$$\|x - \frac{a+b}{2}\| < \|x-a\|$$
2. Montrer que pour $x \in \mathrm{E}$, il existe un unique vecteur $a \in \mathrm{C}$ tel que
$$\|x-a\| = \operatorname*{Inf}_{y \in \mathrm{C}} \|x-y\|$$
On définit l'application $p : x \mapsto a$ *projection sur le convexe* C.
3. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $a \in \mathrm{C}$ tel que $\langle x-a, y-a \rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in \mathrm{C}$. Montrer que $a = p(x)$.
4. On suppose qu'il existe $y \in \mathrm{C}$ tel que
$$\langle x - p(x), y - p(x) \rangle > 0$$
En considérant $ty + (1-t)p(x)$ avec $t \in [\,0\,;1\,]$, obtenir une contradiction.
5. Montrer $\qquad \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x-y, p(x)-p(y) \rangle \geqslant \|p(x)-p(y)\|^2$

   En déduire que p est une application continue.