ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°54

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul. On suppose M trigonalisable dans E. Montrer que M admet une base orthonormée de trigonalisation.

Indications : Poser $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ puis considérer $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de trigonalisation de M et $\mathscr{L} = (v_1, \ldots, v_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de $(u_1, \ldots, u_n)$.

Exercice 2 (**)

Soit E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$$

Indications : Pour le sens direct, décomposer $q(x) = p(x) + q(x) - p(x)$ et observer que $q(x) - p(x) = q(x) - x + x - p(x)$ pour $x \in \mathrm{E}$.

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien de dimension n.

1. Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_{n+1}$ dans E tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n+1]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

2. Soient $x_1, \ldots, x_p$ dans E vérifiant

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, p]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

   (a) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$. Montrer $\sum\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i = 0$.

   (b) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ vérifiant $f(x_i) > 0$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, p]\!]$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

   (c) En déduire $p \leqslant n + 1$.

Indications : 1. Chercher les x_i de la forme $x_{n+1} = -\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ et $x_i = e_i + x_{n+1}$ pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$.

2.(a) Considérer $\|\sum\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i\|^2$ et observer $\alpha_i \alpha_j \leqslant |\alpha_i \alpha_j|$ pour $(i,j) \in [\![1 \,;\, p]\!]^2$.
2.(b) Utiliser la propriété précédente.
2.(c) Si $p > 1$, considérer $f(x) = -\langle x, x_p \rangle$ pour $x \in \mathrm{E}$.

Exercice 4 (***)

Soit E espace préhilbertien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. On suppose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2$$

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les e_i sont unitaires.
3. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Indications : 1. Considérer $\mathrm{F}^\perp$ avec $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$.
2. Montrer que $\|e_k\| \leqslant 1$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ puis supposer qu'une des inégalités est stricte pour un certain k et considérer $x \in \mathrm{Vect}\,(e_i)^\perp_{i\in[\![1\,;n]\!]\smallsetminus\{k\}}$ avec $x \neq 0_\mathrm{E}$.

Exercice 5 (***)

Soit E euclidien. Montrer que $\{(x, y) \in \mathrm{E}^2 \mid (x, y) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2.

Indications : Utiliser le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 6 (****)

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-ev normé. Montrer

$$\|\cdot\| \text{ est une norme euclidienne} \iff \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Indications : Pour le sens indirect, procéder par polarisation et poser φ l'application susceptible d'être le produit scalaire associé à $\|\cdot\|$. Pour $(x, y, z) \in \mathrm{E}^3$, établir en exploitant plusieurs fois l'identité du parallélogramme

$$\varphi(2x, y) = 2\varphi(x, y) \quad \text{et} \quad \varphi(x+z, y) = \varphi(x, y) + \varphi(z, y)$$

Enfin, pour $y \in \mathrm{E}$, poser $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x, y)$ et vérifier que pour $x \in \mathrm{E}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a

$$\varphi_y(nx) = n\varphi_y(x) \quad \text{puis} \quad \varphi_y(rx) = r\varphi_y(x)$$

Conclure avec un argument de densité.

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie. On pose

$$\mu(\mathrm{E}, \|\cdot\|) = \operatorname*{Sup}_{(x,y)\in\mathrm{E}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}$$

1. Montrer $\qquad 1 \leqslant \mu(\mathrm{E}, \|\cdot\|) \leqslant 2$
2. Calculer $\mu(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ et $\mu(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
3. Montrer $\qquad \|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur E $\iff \mu(\mathrm{E}, \|\cdot\|) = 1$

Indications : 1. Pour a et b réels, comparer $(a+b)^2$ avec $2(a^2+b^2)$ et utiliser l'inégalité triangulaire pour établir la majoration. Considérer une configuration particulière simple pour le choix de x et y pour la minoration.
2. Faire des choix simples pour x et y pour chacune des normes considérées.
3. Pour la réciproque, traduire l'égalité sur μ sous forme d'inégalité pour $(x, y) \in \mathrm{E}$ et l'appliquer à $\dfrac{u+v}{2}$ et $\dfrac{u-v}{2}$ pour $(u, v) \in \mathrm{E}^2$. Utiliser enfin le résultat de l'exercice 6 de la feuille 54.