TD ONDES ELECTROMAGNETIQUES II

Exercice 1 :** PROPAGATION D'ONDES LONGITUDINALES DANS UN PLASMA

Dans un plasma dilué, on étudie la possibilité de propagation du champ électromagnétique suivant :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x}.$$

1) Caractériser cette onde. Que vaut le champ magnétique ?
2) Ce plasma est-il localement neutre ? Exprimer la densité volumique de charges.
3) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un électron. En déduire une relation entre la dérivée de la densité volumique de courant $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ et $\vec{E}$.
4) A l'aide des équations de Maxwell, trouver une autre relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.
5) En déduire l'équation vérifiée par $\vec{E}$. Quelle est la relation de dispersion ? Calculer la vitesse de groupe.
6) Calculer le vecteur de Poynting. Conclure sur la propagation de l'énergie.

Exercice 2♥ :** REFLEXION-TRANSMISSION D'UNE ONDE A LA SURFACE D'UN PLASMA

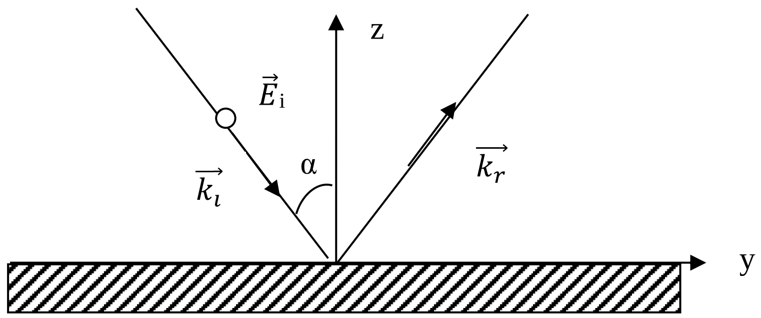
Un plasma dont la pulsation propre est ω_p occupe le demi-espace x>0. Une OEMPPM polarisée rectilignement se propage dans le vide (demi-espace x<0) et atteint sous incidence normale le plasma. Le champ électrique de cette onde incidente est noté $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{u_y}$. Cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise également polarisées suivant (Oy).

1) On note $\underline{r}E_0$ l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi et $\underline{t}E_0$ celle du champ électrique transmis. Ecrire en notation complexe les champs électriques et magnétiques des ondes incidentes, réfléchie et transmise en fonction de $\underline{r}$, $\underline{t}$, E_0, c, ω, t, x, des vecteurs de bases et de l'indice optique $\underline{n}$ du plasma défini par $\underline{k}_{plasma} = \underline{n}\omega/c$. La relation de dispersion dans le plasma est ici supposée connue.
2) Déterminer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n}$. On indique qu'il n'y a pas de courant surfacique à la surface de séparation du vide et du plasma donc il y a continuité du champ électromagnétique.
3) On définit les facteurs de réflexion R et de transmission T en énergie par :

$$R = \frac{\left\langle \vec{\Pi}_r(0,t) \right\rangle \bullet (-\vec{u}_x)}{\left\langle \vec{\Pi}_i(0,t) \right\rangle \bullet \vec{u}_x} \text{ et } T = \frac{\left\langle \vec{\Pi}_t(0,t) \right\rangle \bullet (\vec{u}_x)}{\left\langle \vec{\Pi}_i(0,t) \right\rangle \bullet \vec{u}_x} \text{ où } \vec{\Pi} \text{ est le vecteur de Poynting.}$$

Exprimer R et T en fonction de ω et ω_p. Commenter dans les cas $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$.

Exercice 3♥ :** REFLEXION SOUS INCIDENCE OBLIQUE SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT



Une onde plane progressive monochromatique dans le vide se réfléchit sur un métal parfaitement conducteur avec un champ électrique tangent à la surface du métal (d'équation z=0) et un vecteur d'onde qui fait un angle α avec la normale à la surface.

1) Déterminer le champ magnétique incident et les champs réfléchis.
2) Exprimer les densités surfaciques de charge et de courant.
3) On peut montrer que la force $d\vec{F}$ exercée par le champ électromagnétique sur un élément de métal parfait d'aire dS est donné par l'expression : $d\vec{F} = 1/2.\left[\sigma\vec{E} + \overrightarrow{J_S} \wedge \vec{B}\right] dS$

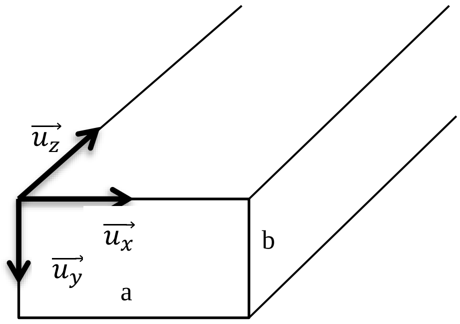
La calculer ici. Pourquoi parle-t-on de pression de radiation ?

Exercice 4*♥ : REFLEXION SUR UN MIROIR MOBILE - EFFET DOPPLER

Une surface parfaitement conductrice, plane et perpendiculaire à (Ox), se déplace à la vitesse uniforme $\vec{v} = v\overrightarrow{u_x}$ **;** elle coïncide ainsi à l'instant t avec le plan d'équation x=v.t.
Une onde électromagnétique dont le champ s'écrit $\vec{E}=E_0\cos(\omega(t-x/c))\overrightarrow{u_y}$ se réfléchit sur cette surface.

1) Chercher l'onde réfléchie sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω' que l'on déterminera grâce aux relations de passage (ici la continuité de $\vec{E}_{\text{tangentiel}}$)
2) Exprimer la variation de fréquence Δf à la réflexion lorsque v<<c.
AN : f=ω/2π=5,00GHz et v=100km.h^{-1}.

Exercice 5♥ :** GUIDE D'ONDES



Une cavité vide, invariante par translation suivant $\overrightarrow{u_z}$, est taillée dans un conducteur parfait. Sa section est un rectangle de côtés a suivant $\overrightarrow{u_x}$ et b suivant $\overrightarrow{u_y}$. On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique de direction $\overrightarrow{u_z}$ dans ce guide d'ondes :
$\vec{E}(M,t) = f(x,y)\exp\left(i(\omega t - kz)\right)\overrightarrow{u_y}$ où f est une fonction à déterminer.

1) Commenter la forme de cette onde et notamment le fait que f ne dépende pas de z.
2) En utilisant une équation de Maxwell, montrer que f ne dépend en fait que d'une seule variable.
3) A l'aide de l'équation de propagation du champ électrique, trouver une équation différentielle vérifiée par f.
4) La résoudre en utilisant les conditions aux limites. On établira que cette équation n'a des solutions compatibles avec les conditions aux limites que si ω et k vérifient la relation :
$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = n^2\frac{\pi^2}{a^2}$ avec n entier.
5) Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ pour une valeur de n ou un mode du guide d'ondes. Commenter le résultat.
6) Montrer que le champ ne peut se propager qu'à partir d'une fréquence minimale f_c. Quel type de filtrage effectue ce guide ? Calculer f_c pour a=1cm et préciser le domaine spectral correspondant.

Exercice 6* :** ONDE A LA SURFACE DE LA MER

La mer occupe le demi-espace z<0. Elle est assimilée à un milieu conducteur de conductivité γ, de permittivité relative ε_r. L'air occupe le demi-espace z>0, il a les mêmes propriétés électromagnétiques que le vide. On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dont on donne le champ magnétique :
- dans l'air : $\vec{B}_1 = f_1(z).e^{i(\omega.t-k1.x)}\,\vec{e}_y$.
- dans la mer : $\vec{B}_2 = f_2(z).e^{i(\omega.t-k2.x)}\,\vec{e}_y$

1) Etablir l'équation de propagation du champ magnétique dans chacun des deux milieux. En déduire les équations différentielles vérifiées par f_1 et f_2.
2) On pose $f_1(z) = A.e^{i\alpha z}$ et $f_2(z) = B.e^{i\beta z}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.
Déterminer les équations vérifiées par α et β.
Montrer, par des arguments énergétiques, que $\mathrm{Im}(\alpha) \geq 0$ et $\mathrm{Im}(\beta) \leq 0$.
3) En déduire les expressions des champs électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ associés.
4) Grâce aux conditions de passage des champs (dans ce modèle volumique il n'y a pas de courant surfacique), montrer que :
$A = B$, $k_1 = k_2$ et $\alpha(\varepsilon_r - i\mu_0\gamma c^2/\omega) = \beta$.

Exercice 7**♥ **:** CAVITE RESONANTE

Une cavité a la forme d'un parallélépipède rectangle dont les côtés Oa=a, OB=b, OC=c, sont portés par Ox, Oy, Oz , O étant un sommet.
Les parois de cette cavité sont délimitées par un métal parfait.
1) Trouver la relation liant k_1, k_2, k_3 et ω, pour que le champ électrique $\vec{E}$ de coordonnées :
$E_x = E_1.\cos(k_1.x+\varphi_1).\sin(k_2.y+\varphi_2).\ \sin(k_3.z+\varphi_3).e^{j\omega t}$
$E_y= E_2.\sin(k_1.x+\varphi_1).\cos(k_2.y+\varphi_2).\ \sin(k_3.z+\varphi_3).e^{j\omega t}$
$E_z = E_3.\sin(k_1.x+\varphi_1).\sin(k_2.y+\varphi_2).\ \cos(k_3.z+\varphi_3).e^{j\omega t}$
satisfasse à l'équation de propagation dans le vide (la relation de dispersion).
2) A partir des équations de Maxwell, établir une relation entre E_1, E_2, E_3, k_1, k_2, k_3.
3) Déterminer les valeurs possibles de ω pour que $\vec{E}$ satisfasse aux conditions aux limites. On exprimera ω en fonction des trois entiers n_1, n_2, n_3. On obtient ainsi les pulsations propres de la cavité.
4) Calculer la plus petite pulsation propre (a<b<c). AN : c=2*b=10cm.

Exercice 8** **:** RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE DEMI-ONDE

Une antenne filiforme, colinéaire à l'axe Oz, de longueur l=λ/2, centrée à l'origine, est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité $\underline{I}(z,t)=I_0\cos(2\pi z/\lambda)\exp(i\omega t)$ avec $\omega=2\pi c/\lambda$.
Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques d'origine O, d'axe Oz.
On se place dans la zone de rayonnement r>>λ.
On admet que le champ magnétique total rayonné en M par l'antenne est :

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = i\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\exp\left(i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

et que localement ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive.

1) Calculer la moyenne dans le temps du vecteur de Poynting en M.
2) Calculer la puissance moyenne P rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r.
   On donne $\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta = 1{,}22.$
   En déduire la résistance de rayonnement R de l'antenne définie par $P=RI_{eff}^2$. Calculer numériquement R. Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est P=2100kW (puissance de l'ancien émetteur Grandes Ondes de France Inter à Allouis, éteint depuis janvier 2017)

Relations de passage :

On donne les relations de passage pour le champ électromagnétique à la traversée d'une interface entre deux milieux 1 et 2. La surface de séparation est éventuellement chargée avec une densité surfacique de charges $\boldsymbol{\sigma}$ et parcourue par un courant surfacique de densité $\vec{j}_S$:

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{2->1}$$
$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0\vec{j}_S \wedge \vec{n}_{2->1}$$

Réponses :

Ex 1 : 1) $\vec{B} = \vec{0}$ 2) $\rho = k\varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - kx)$ 3) $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$ 4) $\vec{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

5) $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\vec{E}$ $\omega^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ $v_g = 0$ 6) $\vec{R} = \vec{0}$

Ex 2 : 2) $\underline{r} = \frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}$ $\underline{t} = \frac{2}{1+\underline{n}}$

3) *Si* $\omega > \omega_p$ $R = \left[\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega p}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega p}{\omega}\right)^2}}\right]^2$ *et* $T = \frac{4\sqrt{1-\left(\frac{\omega p}{\omega}\right)^2}}{\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega p}{\omega}\right)^2}\right]^2}$

Si $\omega > \omega_p$ $T = 0$ *et* $R = 1$

Ex 3 : 2) $\overrightarrow{J_S} = +\frac{2E_0}{c\mu_0}\cos(\alpha) e^{j(\omega t - k\sin(\alpha)y)}\overrightarrow{e_x}$ *et* $\sigma = 0$

3) $d\vec{F} = -\frac{2E_0{}^2}{c^2\mu_0}\cos^2(\alpha)\cos^2(\omega t - k\sin(\alpha)y)dS\overrightarrow{e_z}$ *a les caractéristiques d'une force de pression*

Ex 4 : 1) $\omega' = \omega\frac{1-v/c}{1+v/c}$ 2) $\Delta f = -\frac{2v}{c}f = 926$ Hz

Ex 5 : 3) $f'' + (\omega^2/c^2 - k^2)f = 0$ 4) $f(x) = E_{0n}\sin(n\pi x/a)$

6) $f_c = nc/2a$ *Pour n=1 et a=1cm,* $f_c = 15$ *GHz ondes centimétriques*

Ex 6 : 1) *Dans l'air* $\vec{\Delta}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ *d'où* $f_1'' + (\omega^2/c^2 - k_1^2)f_1 = 0$

Dans la mer $\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ *d'où* $f_2'' + (\varepsilon_r\omega^2/c^2 - j\omega\mu_0\gamma - k_2^2)f_2 = 0$

2) $\alpha^2 = \omega^2/c^2 - k_1^2$ $\beta^2 = \varepsilon_r\omega^2/c^2 - j\omega\mu_0\gamma - k_2^2$

…

Ex 7 : 1) $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \omega^2/c^2$ 2) $k_1E_1 + k_2E_2 + k_3E_3 = 0$

3) $\omega = \pi C\sqrt{\left(\frac{n_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{c}\right)^2}$ 4) $\omega_{min} = \pi C\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2} = 2{,}1.10^{10}$ rad.s^{-1}

Ex 8 : 1) $\langle\vec{R}\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2\vec{u}_r$ *est maximale en* $\theta = \pi/2$

2) $P = 1{,}22\frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi}$ $R = 1{,}22\frac{\mu_0 c}{2\pi} = 73{,}2\ \Omega$ *Pour P=2100kW,* $I_0 = 240$ A